TP 2 Convexité d'une fonction LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer la convexité d'une fonction à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis la démontrer.

On souhaite étudier graphiquement puis démontrer la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-0,5x} + 1.$$

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
2. Créer un curseur a compris entre –2 et 15, puis placer le point de coordonnées $A(a\,; f(a))$.
3. Construire la tangente $\mathscr{T}_f$ à $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. En faisant varier le curseur et en observant la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}_f$, conjecturer la convexité de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les abscisses des éventuels points d'inflexion.
5. Tracer, dans le même repère, la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f pour confirmer les conjectures faites à la question précédente.
6. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, puis celle de sa dérivée seconde f''.
En déduire le tableau de signes de la fonction f'' et démontrer les conjectures.

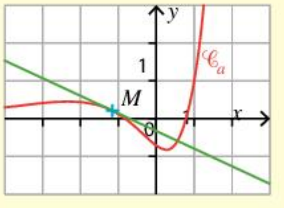
TP 3 Convexité d'un produit de fonctions LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer la convexité d'un produit de fonctions à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis la démontrer

Soit $a \in [-5\,; 5]$. On considère les fonctions u_a et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_a(x) = x^2 + a \text{ et } v(x) = e^x.$$

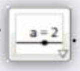
On note f_a le produit des fonctions u_a et v. On admet que toutes ces fonctions sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.



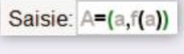
1. Préciser la convexité des fonctions u_a et v sur $\mathbb{R}$.
2. Ouvrir une feuille de travail dans un logiciel de géométrie.
a. Créer un curseur a prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-5\,; 5]$.
b. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_a$ de la fonction f_a et faire varier le curseur a.
c. Construire un point M sur $\mathscr{C}_a$ et la tangente à $\mathscr{C}_a$ en M.
3. **a.** La proposition suivante est-elle vraie ?
« Le produit de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I. »
b. À l'aide de la figure, conjecturer pour quelles valeurs de a la fonction f_a est convexe.
c. On prend $a = 1$. Conjecturer graphiquement la convexité de la fonction f_1.
4. **a.** Montrer que $f_a''(x) = P_a(x)e^x$, où $P_a(x) = x^2 + 4x + 2 + a$.
b. On note Δ_a le discriminant du trinôme P. Montrer que $\Delta_a = 4(2 - a)$.
c. En déduire une preuve de la conjecture émise à la question **3.b**.
d. On prend $a = 1$. Étudier alors le signe du trinôme P_1 selon les valeurs de x et en déduire une preuve de la conjecture émise à la question **3.c**.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour créer un curseur, utiliser .

- Pour saisir un point de coordonnées données en fonction d'un curseur a :



- Pour obtenir la trace d'un point, faire un clic droit sur le point mobile et sélectionner « afficher la trace ».
- Pour tracer une tangente à une courbe, utiliser :