

TP

1

Une somme de carrés ALGO PYTHON

Objectif
Utiliser les listes pour afficher les termes d'une suite et pour émettre une conjecture.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k^2$$

L'objectif de ce TP est d'afficher et de représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un programme Python, puis de trouver une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls.

- 1 Recopier et compléter le script ci-dessous afin que la fonction renvoie la liste des carrés des entiers de 1 à n .

```
def liste_carrés(n):
    return [... for k in range (...)]
```

- 2 En utilisant la fonction `sum`, écrire une fonction nommée `u` d'argument n qui renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) .

- 3 Créer une liste `L` définie en compréhension qui contient les 30 premiers termes de la suite.

- 4 a. Le script ci-dessous permet d'afficher un nombre donné de points représentant les premiers termes de la suite (u_n) .

```
from matplotlib.pyplot import*
def tracé(nombre_points):
    for i in range(1, nombre_points+1):
        plot(i, u(i), 'r. ')
    show()
```

Recopier ce script à la suite des scripts précédents.

- b. Que doit-on écrire dans la console pour obtenir un graphique représentant les 80 premiers termes de la suite ?

- 5 On suppose qu'il existe une fonction f définie sur $[1; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.

- a. À l'aide du graphique précédent, quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de la fonction f ?

- b. CALCULATRICE En utilisant les valeurs de la suite trouvées à l'aide de la liste `L`, conjecturer l'expression algébrique de f . On pourra utiliser le solveur de la calculatrice pour résoudre le système.

- c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, une formule explicite possible pour (u_n) est :

$$u_n = (n+1)(2n+1).$$

- 6 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que l'on a bien $u_n = (n+1)(2n+1)$ pour tout entier naturel n non nul.

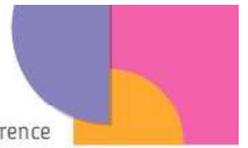
- 7 En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers non nuls.

Boîte à outils

- On peut définir une liste en compréhension avec l'instruction `[formule contenant k for k in range(min,max+1)]`.
- Afin de créer une liste `L` des termes d'une suite définie par récurrence dans une fonction, on pourra utiliser `L[-1]`, qui est la dernière valeur de la liste `L`. Cette valeur sera utilisée dans le calcul du terme suivant de la suite grâce à la formule de récurrence.

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Le terme alors calculé sera à son tour ajouté dans la liste, en dernière position, grâce à l'instruction :
`liste.append(terme à ajouter)`.
- Dans `from matplotlib.pyplot import*`, le `*` permet d'importer tout le contenu de la bibliothèque. On pourra ainsi utiliser les fonctions définies dans cette bibliothèque, comme `plot` ou `show`.



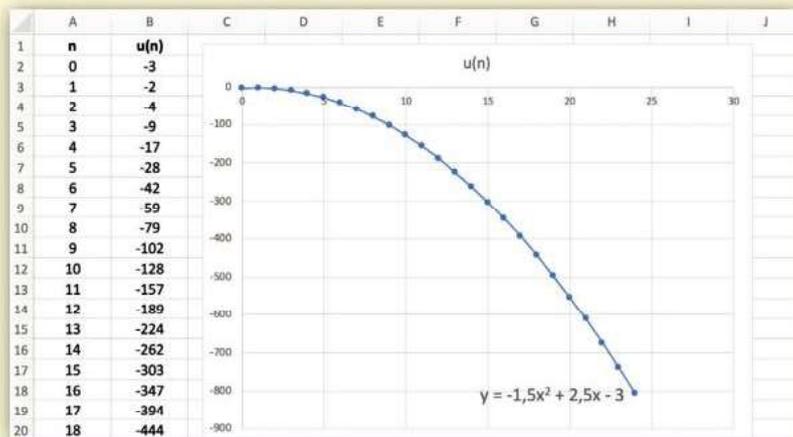
TP 2 Établir l'expression explicite d'une suite TABLEUR

Objectifs
Utiliser le tableur pour afficher les termes d'une suite et pour émettre une conjecture, puis la démontrer par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$. On souhaite déterminer une formule explicite de u_n pour tout n appartenant à \mathbb{N} .

- 1 Ouvrir un tableur et recopier la feuille de calcul commencée ci-contre.
- 2 Quelle formule saisir dans la case B3 qui, recopiée vers le bas, permettra d'afficher les premiers termes de cette suite ?
- 3 Construire sur le tableur une représentation graphique des 25 premiers termes de cette suite.
- 4 Faire apparaître sur la représentation graphique précédente une courbe de tendance polynomiale ainsi que son équation.
- 5 On suppose qu'il existe une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.
À l'aide du graphique précédent, quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de la fonction f ?
- 6 a. L'équation de la courbe de tendance affichée à la question 4 donne-t-elle exactement l'expression algébrique de f ?
b. Donner une formule explicite possible pour la suite (u_n) .
- 7 Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
- 8 Calculer la valeur de u_{2020} et vérifier avec le tableur.
- 9 Reprendre les questions 1 à 7 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$. On s'aidera de la copie d'écran ci-dessous.

	A	B
1	n	u(n)
2	0	0
3	1	
4	2	
5	3	

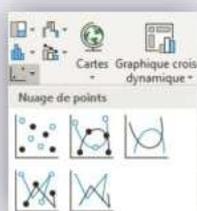


- 10 Reprendre les questions les questions 1 à 7 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + n$. La méthode fonctionne-t-elle ?

Boîte à outils

Tableur

- Pour insérer un graphique :



- Pour ajouter une courbe de tendance
 - faire un clic droit sur la courbe tracée au tableur ;
 - dans le menu « courbe de tendance », choisir « ajouter une courbe de tendance » ;
 - choisir le type de la courbe de tendance (linéaire, polynomiale, etc.) ;
 - cocher « Afficher l'équation sur le graphique ».