

## Algorithmique : Exercices

### EXERCICE 1

Bac Asie 10 juin 2024.

On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
1 ▼ def terme(N) :  
2     U=1  
3 ▼   for i in range(N) :  
4       U=U+i  
5     return U
```

Est-il vrai ou faux que `terme(4)` renvoie la valeur 7 ? Justifier.

### EXERCICE 2

Bac sujet 0 session 2024.

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

- (a) On désigne par  $F_1$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $F_1(x) = (x-1)e^x$ .  
Vérifier que  $F_1$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .  
(b) Calculer  $I_1$ .
- À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ .
- Calculer  $I_2$ .
- On considère la fonction `mystere` écrite en Python :

```
from math import e # la constante d'Euler e  
  
def mystere(n):  
    a = 1  
    L = [a]  
    for i in range(1,n):  
        a = e - (i + 1)*a  
        L.append(a)  
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

### EXERCICE 3

Bac sujet 0 session 2024.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.  
Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

- On considère la fonction `calcul` écrite en qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

```
def calcul(n):  
    u = 0  
    for i in range(n):  
        u = 3 * u + 1  
    return u
```

On considère par ailleurs la fonction `liste` écrite en Python :

```
def liste(n):  
    l = [ ]  
    for i in range(n):  
        l.append( calcul(i) )  
    return l
```

**Affirmation 1 :** « l'appel `liste(6)` renvoie la liste  $[0, 1, 4, 13, 42, 121]$ . »

2. **Affirmation 2 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ . »

3. **Affirmation 3 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n$  est une puissance de 3. »

### EXERCICE 4

Bac Amérique du sud 27 septembre 2023.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$ .

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

- Soit  $n$  un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument  $n$  ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de  $u_n$ .

```
def suite_u(n) :  
    u = ...  
    for i in range(n) :  
        | u = ...  
    return u
```

**EXERCICE 5**

Bac Métropole 12 septembre 2023.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{e} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

- Calculer les valeurs exactes de  $u_2$  et  $u_3$ . On détaillera les calculs.
- On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel  $n$  donné, affiche le terme  $u_n$ . Compléter les lignes  $L_2$  et  $L_4$  de ce programme.

|       |                                    |
|-------|------------------------------------|
| $L_1$ | <code>def suite(n):</code>         |
| $L_2$ | <code>.....</code>                 |
| $L_3$ | <code>for i in range(1, n):</code> |
| $L_4$ | <code>u=.....</code>               |
| $L_5$ | <code>return u</code>              |

**EXERCICE 6**

Bac Métropole 11 septembre 2023 : QCM.

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 15$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 1,2u_n + 12$ .

- La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier  $n$  telle que  $u_n > 10\,000$ .

|                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>def seuil() :     n=0     u=15     while .....:         n=n+1         u=1,2*u+12     return(n)</pre> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

À la ligne 4, on complète par :

- $u \leq 10\,000$ ;
  - $u = 10\,000$
  - $u > 10\,000$ ;
  - $n \leq 10\,000$ .
- On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = u_n + 60$ .  
La suite  $(v_n)$  est :

- une suite décroissante;
- une suite géométrique de raison 1,2;
- une suite arithmétique de raison 60;
- une suite ni géométrique ni arithmétique.

**EXERCICE 7**

Bac Nouvelle-Calédonie 28 août 2023.

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$ .

- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^7$ .
  - Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
  - Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

|                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>def suite() :     u = 3     n = 0     while ... :         u = ...         n = n + 1     return n</pre> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**EXERCICE 8**

Bac La Réunion 29 mars 2023. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 8$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

On admet que la suite  $(u_n)$  converge vers 2.

On considère la fonction Python `seuil` ci-contre, où  $A$  est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

|                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>def seuil(A) :     n = 0     u = 8     while u &gt; A :         u = (6*u + 2)/(u + 5)         n = n + 1     return n</pre> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**EXERCICE 9**

Bac Polynésie 14 mars 2023.

On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste  $L$  de nombres en paramètre.

On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste  $L$ .

|                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>def mystere(L) :     M = L[0]     # On initialise M avec le premier élément de la liste L     for i in range(len(L)) :         if L[i] &gt; M :             M = L[i]     return M</pre> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Affirmation :** L'exécution de `mystere([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5])` renvoie 7.  
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

## EXERCICE 10

D'après bac Antilles-Guyane juin 2012.

On considère l'algorithme suivant :

```
def variable() :
    C = 0
    for i in range(9) :
        A = randint(1,7)
        if A > 5 :
            C = C + 1
    return C
```

On rappelle que `randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire appartenant à l'intervalle  $[a;b]$ .

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $C$  affichée.

Quelle loi suit la variable  $X$  ? Préciser ses paramètres.

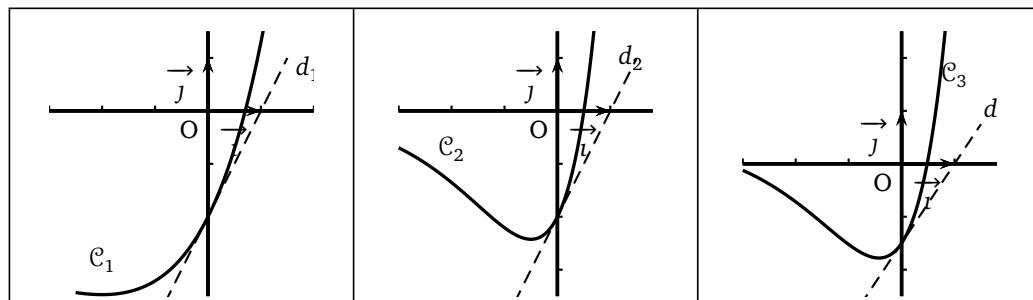
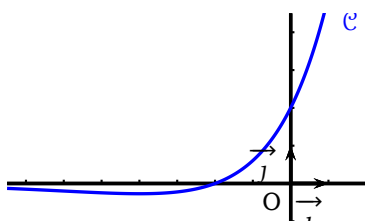
## EXERCICE 11

Bac Métropole septembre 2013.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe  $\mathcal{C}$  et trois autres courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2. On désigne par  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

(a) À l'aide de la courbe  $\mathcal{C}$ , déterminer  $F'(0)$  et  $F'(-2)$ .

(b) L'une des courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  est la courbe représentative de la fonction  $F$ .

Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

### Partie B

Dans cette partie, on admet que  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$ .

1. L'observation de la courbe  $\mathcal{C}$  permet de conjecturer que la fonction  $f$  admet un minimum.

(a) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$ .

(b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

(a) Interpréter géométriquement le réel  $I$ .

(b) Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ . Vérifier que  $f = 2(u'v + uv')$ .

(c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

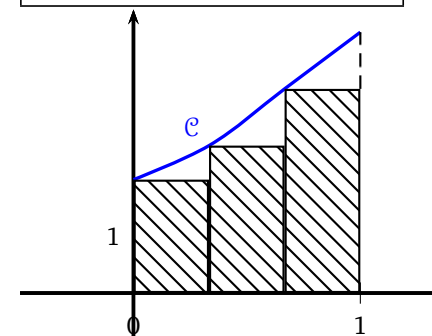
```
def f(x):
    return (x+2)*exp(x/2)

def calcul(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + 1/n*f(i/n)
    return s
```

3. On donne l'algorithme ci-contre.

(a) Justifier que `calcul(3)` représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

(b) Que dire de la valeur de `calcul(n)` fournie par l'algorithme proposé lorsque  $n$  devient grand ?



## Algorithmique : Corrigé des Exercices

### EXERCICE 1

#### Affirmation VRAIE.

L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

Puis, la boucle `for` va s'exécuter `N` fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et `N-1`, donc ici 0, 1, 2 et 3.

- La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1 ;
- La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à  $1 + 1 = 2$  ;
- La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à  $2 + 2 = 4$  ;
- La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à  $4 + 3 = 7$ .

On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

### EXERCICE 2

### EXERCICE 3

### EXERCICE 4

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$ .

- Pour  $n = 0$  on a :  $u_1 = u_{0+1} = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$
  - Pour  $n = 1$  on a :  $u_2 = u_{1+1} = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(0,n) :
        u = 5*u - 8*i + 6
    return u
```

### EXERCICE 5

- Pour  $n = 1$  :  $u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1} \right) u_1 = \frac{1}{e} (2) \frac{1}{e} = \frac{2}{e^2}$
  - Pour  $n = 2$  :  $u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) u_2 = \frac{1}{e} \left( \frac{3}{2} \right) \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^3}$

```

L1 def suite(n):
L2     u = 1/e
L3     for i in range(1, n):
L4         u = 1/e*(1+1/i)*u
L5     return u
```

### EXERCICE 6

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while u <= 10 000:
        n=n+1
        u=1,2*u+12
    return(n)
```

1.

Réponse a.

- On a quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1,2u_n + 12 + 60 = 1,2u_n + 72 = 1,2(u_n + 60) = 1,2v_n$  : cette égalité montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 1,2.

### EXERCICE 7

- Opérations sur les limites, très facile... On obtient  $+\infty$ .

2. (a)

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

(b)

| u          | n  | u < 10 <sup>7</sup> |
|------------|----|---------------------|
| 3          | 0  | VRAI                |
| 12         | 1  | VRAI                |
| 53         | 2  | VRAI                |
| 254        | 3  | VRAI                |
| 1 255      | 4  | VRAI                |
| 6 256      | 5  | VRAI                |
| 31 257     | 6  | VRAI                |
| 156 258    | 7  | VRAI                |
| 781 259    | 8  | VRAI                |
| 3 906 260  | 9  | VRAI                |
| 19 531 261 | 10 | FAUX                |

La valeur renvoyée par cette fonction est  $n = 10$ .

C'est le rang à partir duquel  $u_n \geq 10^7$ .

### EXERCICE 8

On vérifie à la calculatrice que  $u_{14} \approx 2,000\,79$  est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.

### EXERCICE 9

**Affirmation vraie.**

On initialise  $M$  avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à  $M$ , si un terme est supérieur à  $M$ , il va remplacer  $M$ .

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.

### EXERCICE 10

L'algorithme affiche le nombre de fois où le tirage aléatoire d'un numéro entre 1 et 7 donne un résultat strictement supérieur à 5 lors de 9 tirages. On peut assimiler ces 9 tirages indépendants à un schéma de Bernoulli où l'évènement « succès » est « le numéro obtenu est strictement supérieur à 5 », alors la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 9$  et  $p = \frac{2}{7}$  (probabilité qu'un nombre entier entre 1 et 7 soit strictement supérieur à 5).

### EXERCICE 11

**Partie A**

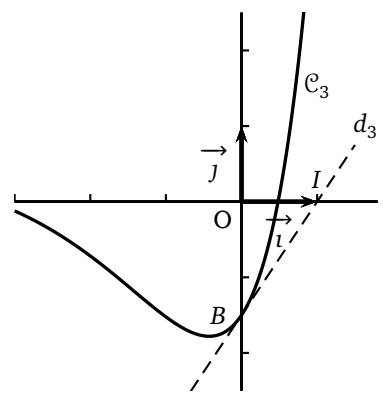
1. Par lecture graphique, le signe de  $f(x)$  est donné par :

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |

2. (a) On sait que  $F$  est une primitive de  $f$  donc,  $F' = f$   
 $F'(0) = f(0) = 2$ ,  $F'(-2) = f(-2) = 0$ .

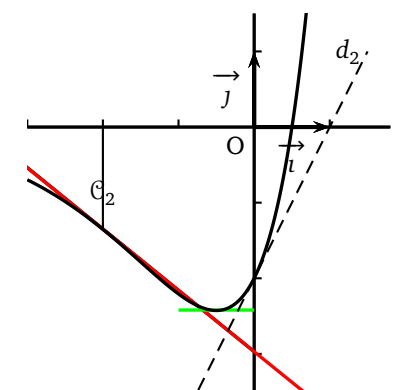
(b)

$\mathcal{C}_3$  ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2. Elle passe par  $B(0; -1,5)$  (environ) et  $I(1; 0)$  donc le coefficient directeur de cette tangente est  $\frac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1,5$ , donc  $\mathcal{C}_3$  ne convient pas.

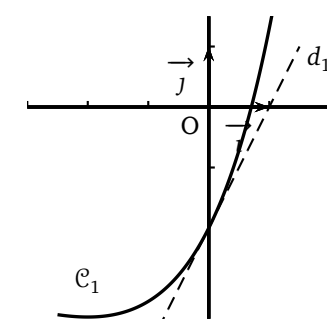


$\mathcal{C}_2$  ne convient pas car la tangente au point d'abscisse  $(-2)$  n'a pas pour coefficient directeur 0.

$\mathcal{C}_2$  ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse  $(-0,5)$  de la courbe.



Il reste donc  $\mathcal{C}_1$



**Partie B :**

- (a)  $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2)e^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$  donc  
 $f'(x) = \frac{1}{2}(2+x+2)e^{\frac{1}{2}x}$ , donc  $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$ .
- (b) On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc  $f'(x)$  est du signe de  $(x+4)$ , et donc le sens des variations de  $f$  est donné par le tableau :

|         |            |              |            |
|---------|------------|--------------|------------|
| $x$     | $-\infty$  | $-4$         | $+\infty$  |
| $f'(x)$ | $-$        | $0$          | $+$        |
| $f$     | $\searrow$ | $(-2)e^{-2}$ | $\nearrow$ |

Il y a donc bien un minimum en  $x = -4$

- (a) si  $x > (-2)$ ,  $f(x) > 0$  vu son expression, donc sur  $[0; 1]$   $f$  est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur  $[0; 1]$  est donc l'aire en unité d'aire de la surface entre la courbe de  $f$ , l'axe des  $x$  et les verticales d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$  (en unité d'aire).
- (b)  $2(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)) = 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) = (2+x)e^{\frac{1}{2}x}$   
Ainsi on voit bien que  $f$  est une dérivée :  $f = (2uv)'$ ; donc  $(2uv)$  est une primitive de  $f$ .

(c) L'intégrale  $I$  se calcule à l'aide d'une primitive de  $f$  donc  $I = [2u(x)v(x)]_0^1 = [2xe^{\frac{1}{2}x}]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

3. (a) Faisons un tableau des valeurs successives de  $i$  et  $s$  pendant le déroulement de l'algorithme pour  $n = 3$  :

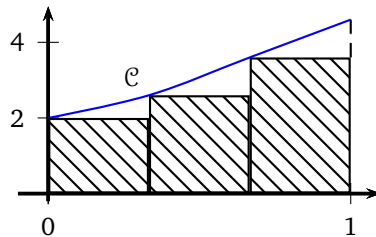
```
def f(x):
    return (x+2)*exp(x/2)

def calcul(n) :
    s = 0
    for i in range(n) :
        s = s + 1/n*f(i/n)
    return s
```

| $i$ | $s$                                                                                                                  |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | 0                                                                                                                    |
| 0   | $0 + \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$                                                                           |
| 1   | $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$                                        |
| 2   | $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ |

calcul(3) renvoie alors  $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ ,

or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par  $n = 3$ , leurs longueurs successives sont  $f\left(\frac{0}{3}\right)$ ,  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ;  $f\left(\frac{2}{3}\right)$ ).



- (b) D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après  $n$  boucles ( de  $i = 0$  à  $i = (n - 1)$ ) est la somme de  $n$  termes qui sont de la forme  $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$  donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des  $x$  entre  $x = 0$  et  $x = 1$ , leur largeur vaut  $\frac{1}{n}$ .

Quand  $n$  devient grand, calcul( $n$ ) se rapproche de  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . (cours : somme de Riemann inférieure.)