MATHEMATIQUES
Primitives et équations différentielles : savoir-faire 1

Exercice 1

F est sous la forme d'un produit $F(x) = \underbrace{(-2x+8)}_{u(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{0,5x}}_{v(x)}$.

Méthode

Pour répondre à la question, on montre que $F' = f$.

$u(x) = -2x+8$, donc $u'(x) = -2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$, donc $v'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$

Explication

$\mathrm{e}^{w(x)}$ a pour dérivée $w'(x)\mathrm{e}^{w(x)}$ avec $w(x) = 0,5x$ et $w'(x) = 0,5$.

On utilise la formule : $F' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \underbrace{-2}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{0,5x}}_{v(x)} + \underbrace{(-2x+8)}_{u(x)} \times \underbrace{0,5\mathrm{e}^{0,5x}}_{v'(x)} \\
&= -2\mathrm{e}^{0,5x} + 0,5(-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= -2\mathrm{e}^{0,5x} + (-x+4)\mathrm{e}^{0,5x} \quad \text{0,5 × (−2) = −1 et 0,5 × 4 = 2.} \\
&= (-2-x+4)\mathrm{e}^{0,5x} \quad \text{On factorise par } .\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

F est bien une primitive de f.

Exercice 2

F est sous la forme d'une somme $F(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{-x}(-1-x)}_{u(x)} + \underbrace{x}_{v(x)}$.

Méthode

C'est toujours le même principe. Pour montrer qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f, il faut dériver F pour obtenir f et le tour est joué.

- u est sous la forme d'un produit $u(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{a(x)}\underbrace{(-1-x)}_{b(x)}$.

On a $a(x) = \mathrm{e}^{-x}$, donc $a'(x) = \underbrace{-1}_{\text{Dérivée de } x \longmapsto -x} \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$

$b(x) = -1-x$, donc $b'(x) = -1$.

Pour calculer u', on utilise la formule : $u' = a'b + ab'$.

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \underbrace{-\mathrm{e}^{-x}}_{a'(x)} \times \underbrace{(-1-x)}_{b(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{a(x)} \times \underbrace{(-1)}_{b'(x)} \\
&= (1+x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{Car } -1(-1-x) = 1+x \\
&= (1+x-1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{En factorisant par } \mathrm{e}^{-x} \\
&= x\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

- $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$.

Comme $F'(x) = u'(x) + v'(x)$, on obtient $F'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1 = f(x)$.

Par conséquent, F est bien une primitive de f.

Exercice 3

a. Montrons que F est une primitive de f. Pour cela on calcule F'.

F est de la forme d'une différence : $F(x) = \underbrace{x\ln x}_{u(x)} - \underbrace{x}_{v(x)}$.

• u est sous la forme d'un produit : $u(x) = \underbrace{x}_{a(x)}\underbrace{\ln x}_{b(x)}$.

On a $a(x) = x$, donc $a'(x) = 1$ et $b(x) = \ln x$ donc $b'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On calcule u' avec la formule $u' = a'b + ab'$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \underbrace{1}_{a'(x)} \times \underbrace{\ln x}_{b(x)} + \underbrace{x}_{a(x)} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{b'(x)} \\ &= \ln x + \frac{x}{x} \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

• $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$.

Comme $F'(x) = u'(x) - v'(x)$, on obtient $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.

Toutes les primitives de f sur $]0\,;\,+\infty[$ sont donc de la forme $F_k : x \longmapsto x\ln(x) - x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. $G(1) = 0 \iff 1\ln(1) - 1 + k = 0 \iff k = 1$.
La fonction $G : x \longmapsto x\ln(x) - x + 1$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 1.

Méthode

Rechercher la primitive G revient à déterminer la valeur de k. Et comme cette valeur de k est unique, on en déduit que G est unique.

Exercice 4

La fonction f est sous la forme d'une somme $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} - \underbrace{\frac{3}{x}}_{v(x)}$.

Rappel

$x \longmapsto x^n$ a pour primitive $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$u(x) = x^2$, donc $U(x) = \dfrac{x^3}{3}$.
$v(x) = \dfrac{3}{x} = 3 \times \dfrac{1}{x}$, donc $V(x) = 3\ln x$.
$f = u + v$ admet comme primitive $F = U + V$ définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3\ln x$.

Exercice 5

$$f(x) = \underbrace{x}_{\substack{\text{c'est presque} \\ u'(x)}} \times \mathrm{e}^{\overbrace{1 - x^2}^{u(x)}}.$$

$u(x) = 1 - x^2$ donc $u'(x) = -2x$.

Explications

Vous devez avant tout reconnaître (ou faire apparaître) la forme $u'\mathrm{e}^u$ qui n'est autre que la dérivée de e^u. Donc une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

On a : $f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2} \times \underbrace{(-2x)}_{u'(x)}}_{-\frac{1}{2}\times(-2x)=x} \times \mathrm{e}^{\overbrace{1-x^2}^{u(x)}}$ On transforme l'écriture de $f(x)$ pour obtenir la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Ainsi, $f = -\frac{1}{2} \times \underbrace{u'\mathrm{e}^u}_{\text{Forme à faire apparaître}}$ dont une primitive est $F = -\frac{1}{2} \times \mathrm{e}^u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}$

Exercice 6

1. f est sous la forme d'une somme : $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} + \underbrace{\left(-3x + \frac{1}{2}\right)}_{v(x)}$.

Conseil
Identifiez bien la forme de la fonction.

On a $u(x) = x^2$, donc $U(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v(x) = -3x + \frac{1}{2}$, donc $V(x) = -3 \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x = -\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}x$.

$f = u + v$ admet comme primitive $F = U + V$.

Ainsi, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Rappel
$\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3$.
$\frac{3x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2$.

2. f est sous la forme d'une somme : $f(x) = \underbrace{2x^3 - 1}_{u(x)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{v(x)}$.

On a $u(x) = 2x^3 - 1$, donc $U(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - x = \frac{2 \times x^4}{4} - x = \frac{x^4}{2} - x$ et $v(x) = \frac{-1}{x^2}$, donc $V(x) = \frac{1}{x}$.

$f = u + v$ admet comme primitive $F = U + V$.

Ainsi, $F(x) = \frac{x^4}{2} - x + \frac{1}{x}$.

Exercice 7

- f est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $u'(x) = \cos(x)$ et $n = 1$.

  Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est donc définie par $F = \frac{u^{1+1}}{1+1}$.

  Ainsi, $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.

  Formule
  Une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

- $g(x) = \frac{2}{(x-1)^3} = 2(x-1)^{-3}$.
  g est de la forme $2 \times u'u^n$ avec $u(x) = x - 1$ et $u'(x) = 1$ et $n = 3$.
  Une primitive G de g sur $]1\ ;\ +\infty[$ est donc définie par :

$$G(x) = 2 \times \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} = 2 \times \frac{(x-1)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$.
  h est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.
  Une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ est donc définie par $H(x) = \ln(u) + k = \ln(x^2+1) + 12$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 3\mathrm{e}^{2x+1} = \dfrac{3}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x+1}$.
  k est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$.
  Une primitive K de k sur $\mathbb{R}$ est donc définie par $K(x) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^u = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x+1}$.