Calcul des limites de
Suites numériques

Exercice n°1

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.
Pour tout entier n :

1°) $u_n = n^2 - 3n + 5$ 2°) $v_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}$

3°) $w_n = \sqrt{n^2 + 3} - n$ 4°) $t_n = \dfrac{2 + 3\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$

Corrigé

Exercice n°1

1°) Limite de $u_n = n^2 - 3n + 5$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}[n^2] = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}[3n] = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[n^2 - 3n + 5] = (+\infty) - (+\infty) = F.\,I.$. Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Pour cela, « *on met en facteur le monôme de plus haut degré* ».
On écrit :

$$u_n = n^2 - 3n + 5 = n^2\left(1 - \frac{3n}{n^2} + \frac{5}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) .$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{-3}{n}\right] = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{n^2}\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$.

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty}[n^2] = +\infty$.

Par conséquent, par produit des limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2°) Limite de $v_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}[2n^2 - 3] = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}[n^2 + n + 1] = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}\right] = \frac{+\infty}{+\infty} = F.\,I.$. Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Pour cela, « *on met en facteur le monôme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur* ». On écrit :

$$2n^2 - 3 = 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right) = 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right) \quad \text{et} \quad n^2 + n + 1 = n^2\left(1 + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Par suite, nous pouvons écrire :

$$v_n = \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1} = \frac{2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

On simplifie par n^2 . Chaque parenthèse au numérateur et au dénominateur tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (voir ci-dessus). Par conséquent, par produit et quotient des limites, la suite (v_n) tend vers 2.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

3°) Limite de $w_n = \sqrt{n^2 + 3} - n$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}[n^2 + 3] = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2 + 3} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}[n] = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[\sqrt{n^2 + 3} - n] = (+\infty) - (+\infty) = F.\,I.$

Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Ici, l'expression de (w_n) n'est pas un polynôme ; c'est une différence entre une racine carrée et un polynôme. Nous allons « *multiplier par la quantité conjuguée* » en utilisant l'identité remarquable n°3 :

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ sous la forme suivante : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. On écrit :

$$w_n=\sqrt{n^2+3}-n=\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{1}$$

$$w_n=\frac{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}{(\sqrt{n^2+3}+n)}$$

Avec l'IR n°3 : $$w_n=\frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}[n]=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+3}+n=+\infty$.

Le numérateur est une constante positive et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}=0$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

4°) $t_n=\frac{2+3\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$, $n>0$.

Pour calculer cette limite, il faut se débarrasser du sinus. C'est un terme qui n'a pas de limite [*du tout*] lorsque n tend vers $+\infty$. Par contre, on sait que le sinus d'un nombre réel est compris entre –1 et 1. Donc, on peut utiliser le théorème de comparaison en faisant un « encadrement » du terme général de la suite par des suites dont on connaît les limites (finies ou infinies !).

On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}, -1\leqslant\sin x\leqslant 1$

Donc, en particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}, -1\leqslant\sin n^2\leqslant 1$,

Donc, $-3\leqslant 3\sin n^2\leqslant 3$

Donc, $2-3\leqslant 2+3\sin n^2\leqslant 2+3$

En divisant les trois membres par $\sqrt{n}>0$, on obtient :

$$\frac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{2+3\sin n^2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{5}{\sqrt{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\right]=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{\sqrt{n}}\right]=0$. Ces deux suites sont convergentes et tendent vers la même limite finie 0. Donc, d'après le théorème de comparaison [dit des gendarmes], on peut affirmer que la suite (t_n) est convergente et tend vers la même limite 0.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$