

MATHEMATIQUES

Vecteurs, droites et plans de l'espace : entraînement savoir-faire 3 (corrigé)

Exercice 1

On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ et on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base de l'espace

Une base de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaires.

Pour justifier que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, on montre que les réels a et b vérifiant $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ n'existent pas.

Ainsi l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ se traduit par les coordonnées :
$$\begin{cases} 0 = a - b \\ 0 = b \\ 1 = b \end{cases}$$
. Donc ce système

n'a pas de solution et les réels a et b n'existent pas. Donc le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$ est bien une base de l'espace.

Exercice 2

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - (-2) \\ 4 - 8 \\ 5 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
 et les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{AC} \text{ sont : } \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 4 - 8 \\ -3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. On a $I\left(\frac{-2-4}{2}; \frac{8+4}{2}; \frac{9+5}{2}\right)$ soit $I(-3; 6; 7)$ et $J\left(\frac{0-8}{2}; \frac{4+6}{2}; \frac{-3+7}{2}\right)$ soit $J(-4; 5; 2)$.

3. En notant $(x_L; y_L; z_L)$ les coordonnées du point L , on obtient $\overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} x_L + 4 \\ y_L - 4 \\ z_L - 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ 4 - 4 \\ -3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\text{Par conséquent } \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ se traduit donc sur les coordonnées par :

$$\begin{cases} x_L + 4 = 1 \\ y_L - 4 = 0 \\ z_L - 5 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = -3 \\ y_L = 4 \\ z_L = 3 \end{cases}$$

Donc $L(-3; 4; -3)$.

$$4. \vec{IJ} \begin{pmatrix} -4+3 \\ 5-6 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{IE} \begin{pmatrix} 1+3 \\ -2-6 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{IL} \begin{pmatrix} -3+3 \\ 4-6 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Méthode

Pour montrer que les points I , J , L et E sont coplanaires, on montre que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{IE}$ et $\vec{IL}$ sont coplanaires.

Pour montrer que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{IE}$ et $\vec{IL}$ sont coplanaires il faut déterminer les réels a et b tels que : $\vec{IJ} = a\vec{IE} + b\vec{IL}$.

Cette égalité se traduit par les coordonnées :

$$\begin{cases} -1 = 4a + 0b \\ -1 = -8a - 2b \\ -5 = -4a - 4b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On en déduit l'égalité vectorielle $\vec{IJ} = -\frac{1}{4}\vec{IE} + \frac{3}{2}\vec{IL}$ ce qui prouve que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{IE}$ et $\vec{IL}$ sont coplanaires et par suite que les points I , J , E et L sont coplanaires.

Exercice 3

On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 5 \\ 3 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Le vecteur $\vec{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 - 5 \\ 4 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

On remarque que les coordonnées du vecteur $\vec{AC}$ sont égales au double de celles de $\vec{AB}$.

On en déduit que $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ et donc que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Les points A , B et C sont donc alignés. En plus, B est le milieu du segment $[AC]$.

Exercice 4

a. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles car $2 \times \frac{1}{2} = 1$ mais $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 2$.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

Rappel

Trois points non alignés définissent un plan.

Par conséquent, ils définissent bien un plan.

b. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-3 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, on montre qu'elles ne sont pas parallèles puis qu'elles sont coplanaires.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles car $1 \times (-3) = -3$ mais $2 \times (-3) = -6 \neq 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et, par conséquent, que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

On cherche maintenant à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires en trouvant deux réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On obtient ainsi le système
$$\begin{cases} -2 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \\ 2 = -\alpha \end{cases}$$

On trouve $\alpha = -2$ à l'aide de la troisième équation et $\beta = -2 - 2\alpha = -2 - 2 \times (-2) = 2$ à l'aide de la première.

De plus, la deuxième équation est bien vérifiée car $2 = -2 + 2 \times 2$.

Ainsi, on obtient la relation vectorielle $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve que les points A , B , C et D sont coplanaires et donc que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Méthode

Les droites n'étant pas parallèles, elles sont soit non coplanaires, soit sécantes (et donc bien sûr coplanaires).

Exercice 5

a. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer les coordonnées des points A , B , F , G .

$A(0; 0; 0)$ car l'origine du repère. $B(1; 0; 0)$ car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$.

$F(1; 0; 1)$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

$G(1; 1; 1)$ car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$.

b. I a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (0, 5; 0; 0)$

K a pour coordonnées $(1; 0, 5; 1)$ donc $\overrightarrow{IK}(0, 5; 0, 5; 1)$.