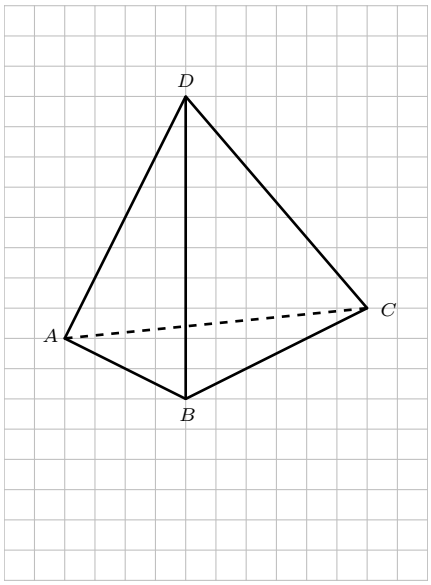
MATHEMATIQUES
Vecteurs, droites et plans de l'espace : entraînement savoir-faire (1)

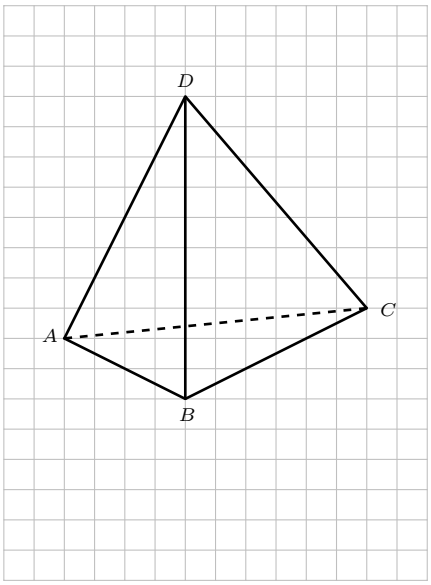
Chapitre 4 : Vecteurs, droites et plans de l'espace.	Evaluation
40. Représenter et utiliser une combinaison linéaire de vecteurs donnés pour résoudre un problème.	●● | ● | ● | ● | ●●

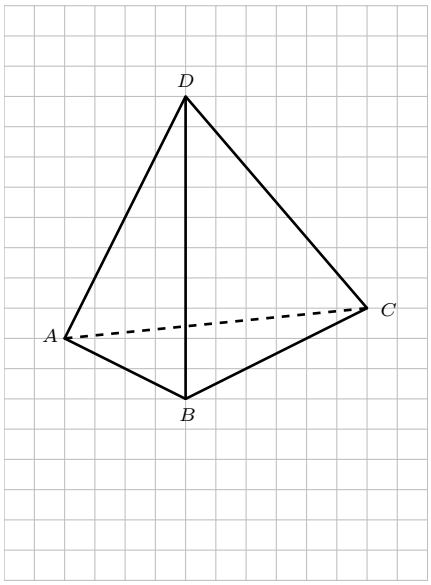
Exercice 1 40

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Placer les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{DB} \qquad \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \qquad \overrightarrow{BP} = \frac{6}{5}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$$







Exercice 2 40

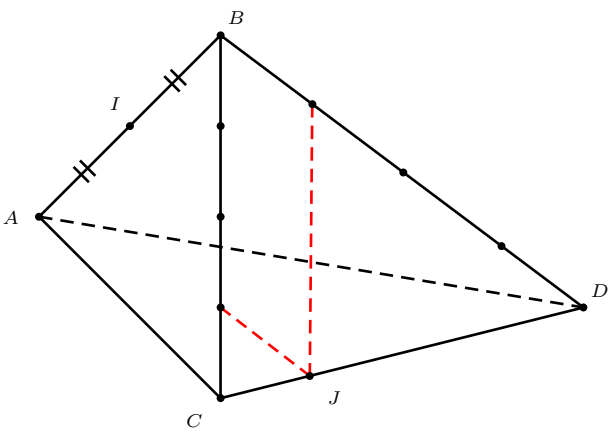
$ABCD$ est un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J un point sur $[CD]$.

1. A l'aide des graduations régulières de la figure, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

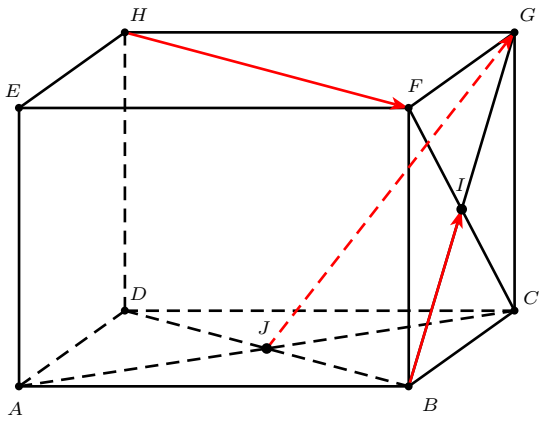
3. En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Exercice 3 40

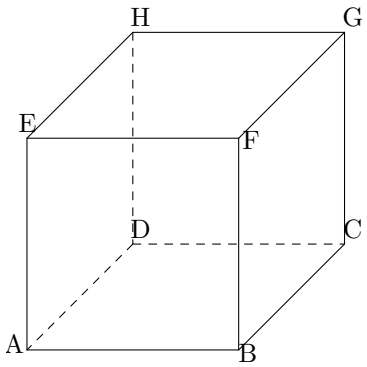
$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu du segment $[BC]$ et J est le milieu du segment $[DB]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.



Exercice 4 40

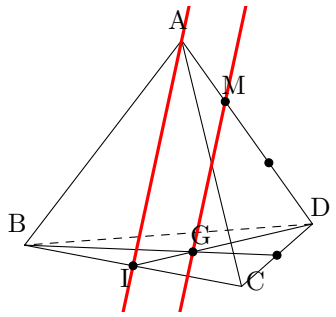
On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

a. $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DC}$.



Exercice 5 40

On considère un tétraèdre $ABCD$.



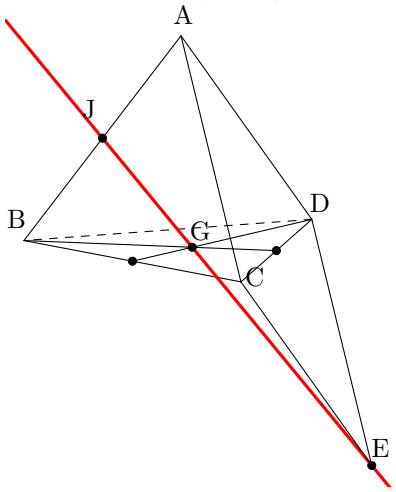
I est le milieu de $[BC]$; G est le centre de gravité du triangle BCD.
M est le point tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

1. a.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DI}$.
b. En déduire que les droites (AI) et (MG) sont parallèles.

Rappel 1 : Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses trois médianes et se situe au $\frac{2}{3}$ de chacun de ses sommets.

Rappel 2 : Le centre de gravité G du triangle BCD vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$.



2. Dans ce même tétraèdre, on considère le point J milieu de $[AB]$ et E tel que $CADE$ est un parallélogramme.

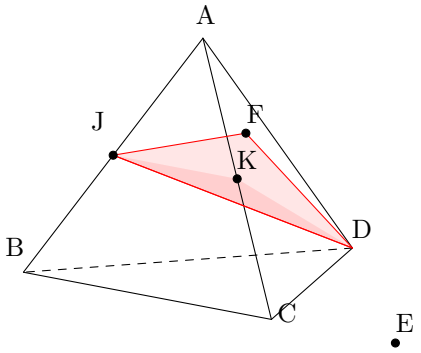
a. En utilisant le rappel 2, montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

En déduire que $\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{JE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
c. En déduire que les points J, G et E sont alignés.

Exercice 6 40

On considère un tétraèdre $ABCD$. J est le milieu de $[AB]$ et K est le milieu de $[AC]$.



On considère le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que $F \in (DJK)$.

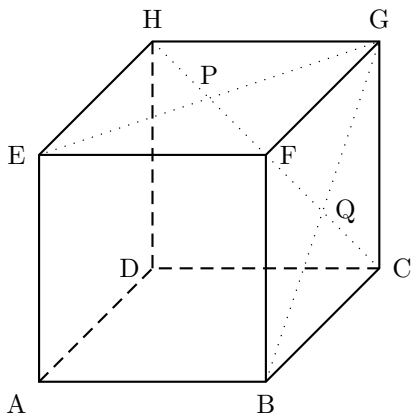
1. a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{DJ} + 3\overrightarrow{DK}$

2. Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ ne sont pas colinéaires. Conclure.

Exercice 7 40

$ABCDEFGH$ est un cube dont l'arête mesure 2 cm. P et Q sont les centres respectifs des faces $EFGH$ et $BCGF$.



1. Tracer en vraie grandeur le patron du cube (avec les points P et Q).

2. Calculer EP.

3. En quel point le triangle AEP est-il rectangle ?

4. En déduire que $AP = \sqrt{6}$ cm.

5. En utilisant le triangle BEG, calculer PQ.

6. Quel nom peut-on donner au solide $GEBF$? Calculer alors son volume.