MATHEMATIQUES
Dérivation, continuité et convexité : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. f est de la forme $\sqrt{u}$. La fonction $u : x \longmapsto x^2+2x+4$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

En effet, $\Delta = 2^2 - 4\times1\times4 = -12 < 0$ et $a = 1 > 0$.

Second degré
Comme $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.

La fonction $f = \sqrt{u}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x+2$.

Dérivabilité
Si $u > 0$ sur I et u dérivable sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

2. La fonction $u : x \longmapsto -4x^2+5x-1$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f de la forme u^n avec $n = 3$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f' = 3u'u^2$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) = -8x+5$.

Automatisme
Toujours rechercher la forme de la fonction pour calculer sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3(-8x+5)(-4x^2+5x-1)$$

Conseil
Il est inutile et déconseillé de développer f' car sa forme factorisée permet d'étudier son signe.

3. La fonction affine $u : x \longmapsto 2x-6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais s'annule en $x = 3$.

La fonction g de la forme $\dfrac{1}{u^p} = u^{-p}$ avec $p = 4$ est donc dérivable sur $]-\infty\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$.
On a $g' = -4u'u^{-5} = \dfrac{-4u'}{u^5}$ avec $u'(x) = 2$.

Pensez-y !
La formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ est valable si $n \leqslant -1$ à condition évidement que $u(x) \neq 0$ (et que u soit dérivable sur I).

Pour tout $x \neq 3$:

$$g'(x) = \frac{-8}{(2x-6)^5}$$

Exercice 2

1. f est du type $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2-x-2$.
Or, $u(x)$ est un trinôme de degré 2 ayant deux racines : -1 et 2.
$u(x)$ est du signe de a sauf entre ses racines. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $u(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$ et f est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty\ ;\ -1] \cup [2\ ;\ +\infty[$.
Et comme $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ sauf là où u s'annule alors $\mathcal{D}' =]-\infty\ ;\ -1[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

On a $u'(x) = 2x - 1$ d'où :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

2. f est du type u^2 avec $u(x) = \dfrac{3x-1}{2x-4}$.
Or, u est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Fonction rationnelle

u est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. On utilise la dérivée d'un quotient pour dériver u.

f est dérivable sur son ensemble de définition donc $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
On a $u'(x) = \dfrac{3(2x-4) - 2(3x-1)}{(2x-4)^2} = \dfrac{-10}{(2x-4)^2}$.
D'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2u'(x)u^{2-1}(x) \\ & = & 2u'(x)u(x) \\ & = & 2 \times \dfrac{-10}{(2x-4)^2} \times \dfrac{3x-1}{2x-4} \\ & = & -\dfrac{20(3x-1)}{(2x-4)^3} \end{array}$$

Formule

La dérivée de u^2 est $2uu'$. Quand on connaît la dérivée de x^2, on connaît celle de u^2. C'est la même (en remplaçant x par u, bien sûr) mais on multiplie derrière par u'.
Dérivée de $x \longmapsto x^2$ c'est $x \longmapsto 2x$, donc dérivée de u^2, c'est $2u \times u'$.

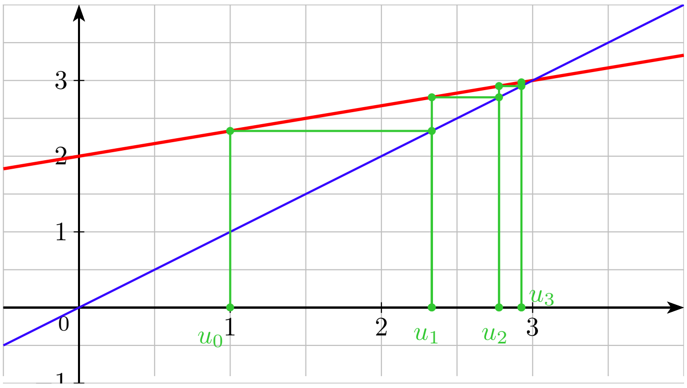
3. $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^{-3}$ est du type u^{-3} avec $u(x) = \sqrt{x} - 1$.
Or, u est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et f aussi sauf là où u s'annule. Donc, $\mathcal{D} = [0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 donc u et f aussi. Ainsi, $\mathcal{D}' =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
On a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -3u'(x)u^{-3-1}(x) \\ & = & -3u'(x)u^{-4}(x) \\ & = & -\dfrac{3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^4} \end{array}$$

4. On pourrait voir le type u^5. Voyons plutôt le type $u(ax+b)$ avec $u(x) = x^5$, $a = 2$ et $b = -3$.
Il est évident que $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$ vu que f est une fonction polynôme de degré 5 !
On a $u'(x) = 5x^4$ d'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & au'(ax+b) \\ & = & 2u'(2x-3) \\ & = & 2 \times 5\,(2x-3)^4 \\ & = & 10\,(2x-3)^4 \end{array}$$

Exercice 3



1. Voir le graphique ci-dessus.

2. On procède par récurrence.
On cherche donc à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$.

- Initialisation à $n = 0$
  On a $1 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 3$.
  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité
  On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$.
  On cherche à démontrer que $1 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 3$.

$$1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3.$$
$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3}u_{n+1} \leqslant 1$$
$$\frac{1}{3} + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leqslant 3$$
$$1 \leqslant \frac{7}{3} \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 3.$$

  On vient de démontrer la propriété au rang $n + 1$.
  On a donc bien l'hérédité.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$.

3. D'après la question précédente, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1}$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.
De plus la suite (u_n) est majorée par 3.
Donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et $\ell \leqslant 3$.

4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.
La fonction f est continue sur l'intervalle $[1; 3]$.
La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[1; 3]$ et converge donc vers une limite ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant 3$.
Donc l est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\ell + 2 &= \ell \\
\frac{2}{3}\ell &= 2 \\
\ell &= \frac{2}{\frac{2}{3}} \\
\ell &= 3
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (u_n) converge vers 3.

Exercice 4

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

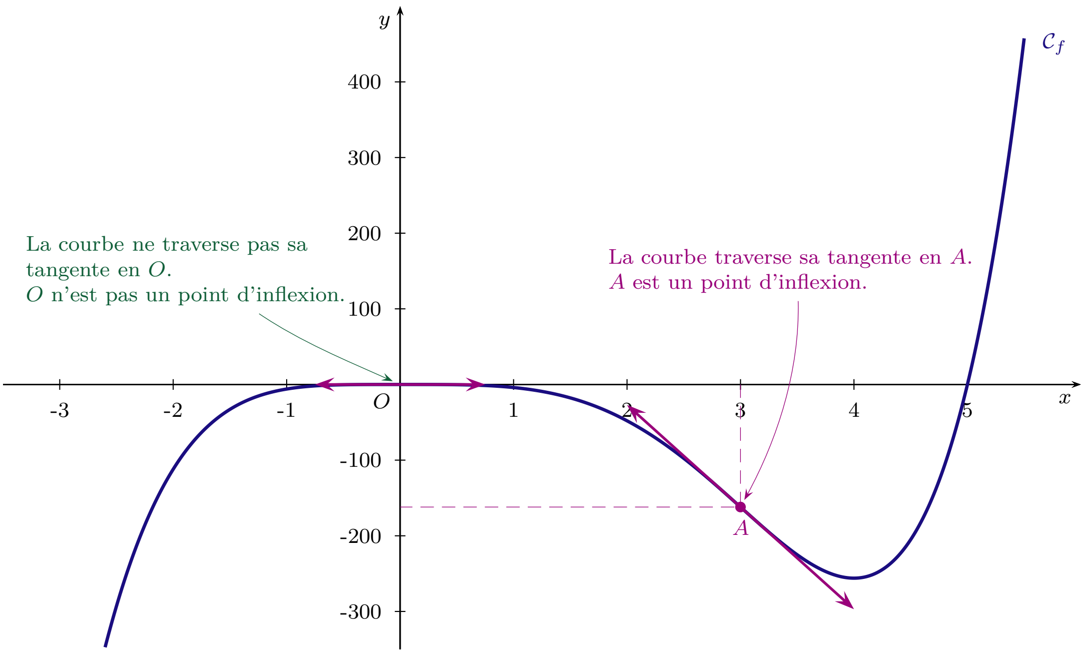
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$$

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$20x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f'	↘					↗	
Convexité de f		f est concave		f est concave		f est convexe	

f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.
L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.

En effet :
- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



Exercice 5

1. Pour tout réel x, on a :
$f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$.
De plus $(x-4)(x-2) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$.
Donc $f'(x) = (x-4)(x-2)$.

Evidemment
$\dfrac{1}{3} \times 3 = 1$.

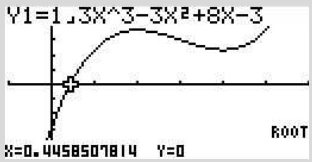
2. La fonction f' est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$.
On étudie le signe de ce trinôme. Les racines (2 et 4) se déduisent de la forme factorisée $(x-4)(x-2)$.

Δ inutile
Avec Δ, on obtient : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 > 0$. On en déduit que f' s'annule en
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6)-\sqrt{4}}{2 \times 1} = 2$ et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6)+\sqrt{4}}{2 \times 1} = 4$.

$x^2 - 6x + 8$ est du signe de a partout, sauf entre ses racines 2 et 4.

x	$-\infty$	0	α	2		4		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		-3	0	3,67		2,33		

Toujours pareil
Votre tableau de variations doit être cohérent avec la courbe que vous trouvez avec votre calculatrice :



3. a. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 2]$. En effet :

- f est continue sur $[0\ ;\ 2]$.
- f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 2]$.
- 0 est une valeur intermédiaire entre -3 et $3,67$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ 2]$.

Sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

b. En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 0,45$.

4. $f''(x) = 2x - 6$.

f'' est une fonction affine qui s'annule en $x = 3$.

5. a. Convexité de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x) = 2x-6$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f est concave		f est convexe	

b. La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = 3$. On en déduit que la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est 3. Son ordonnée est donnée par $f(3)$.
$f(3) = 3$. Ainsi, le point d'inflexion a pour coordonnées $(3\ ;\ 3)$.

Exercice 6

1. On commence par placer les 0 de la fonction, dans la partie inférieure, et leur antécédent, dans la partie supérieure du tableau de variations de f.

x	-5		-4		α_1		3		α_2		10
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

• La fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $[-5\,;\,-4]$ car son minimum vaut $2 > 0$ sur cet intervalle. On ne peut donc pas appliquer le T.V.I. sur $[-5\,;\,-4]$.

• Sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$:

∗ f est continue sur $[-4\,;\,3]$;
∗ f est strictement décroissante sur $[-4\,;\,3]$;
∗ 0 est une valeur intermédiaire entre les images $f(3) = -3$ et $f(-4) = 4$.

A savoir
Il y a trois points à vérifier pour utiliser le corollaire du TVI.

D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_1 \in [-4\,;\,3]$.

• On recommence sur l'intervalle $[3\,;\,10]$:
∗ f est continue sur $[3\,;\,10]$;
∗ f est strictement croissante sur $[-4\,;\,3]$;
∗ 0 est une valeur intermédiaire entre les images $f(3) = -3$ et $f(10) = 1$.
D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_2 \in [3\,;\,10]$.

On conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 dans l'intervalle $[-5\,;\,10]$.

2. Tableau de signes de $f(x)$ sur $[-5\,;\,10]$:

x	-5		α_1		α_2		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Explications
On utilise le tableau de variations pour dresser ce tableau de signes. N'hésitez pas à faire apparaître les signes sur les flèches.

Exercice 7

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} 5x - 10 = +\infty\end{array}\right\}\ \text{Par somme,}\ \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + 5x - 10\right) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} 5x - 10 = -\infty\end{array}\right\}\ \text{Par somme,}\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + 5x - 10\right) = -\infty$$

On obtient le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

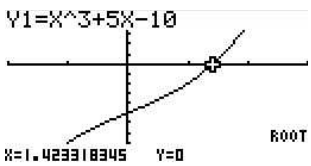
x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$	0	$+\infty$

2. Application du TVI sur $\mathbb{R}$:

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α réelle.

3. En utilisant la calculatrice :



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 3$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -20$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.

Avec le solveur graphique Gsolv F3, puis ROOT on obtient cet affichage.

$$\alpha \simeq 1,42$$