Corrigé du sujet 1

de l'épreuve de mathématiques

Bac Spécialité Maths

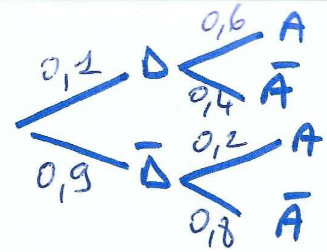
Métropole 15 Mars 2021
(annulée pour cause de Covid)

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie 1

① on a l'arbre suivant



② on cherche $p(D \cap A)$.

$\to$ on a $p(D\cap A) = p(D) \times p_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$

③ on cherche $p(A)$

$\to$ on utilise la formule des probabilités totales.

$$p(A) = p(D\cap A) + p(\bar{D} \cap A)$$
$$= 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$$

④ on cherche $p_A(\bar{D})$

$\to$ on a $p_A(\bar{D}) = \dfrac{p(A\cap \bar{D})}{p(A)} = \dfrac{0,9\times 0,2}{0,24} = 0,75$.

Partie 2

① ⓐ on a $n = 7$ et $p = 0,24 \to \mathcal{B}(7\,;0,24)$

ⓑ on cherche $p(X=1) \to$ binomFdp $\to \boxed{\approx 0,32}$

ⓒ on cherche $p(X \geq 2)$.

$\to$ on a $p(X\geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \approx \boxed{0,53}$

binomFRep

② ⓐ on applique la formule du cours

$\to p(X=0) = \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0}$

$= 1 \times 1 \times 0,76^n = 0,76^n$

ⓑ on veut $p(X\geq 1) \geq 0,99$

or $p(X\geq 1) = 1 - p(X=0)$

Donc on veut $1 - p(X=0) \geq 0,99$

soit $1 - (0,76)^n \geq 0,99$

la fonction ln est ↗ donc elle conserve l'ordre

soit $(0,76)^n \leq 0,01$

$\ln a^n = n \times \ln a$

soit $\ln (0,76)^n \leq \ln 0,01$

ln 0,76 est négatif donc on inverse l'inégalité

soit $n \times \ln 0,76 \leq \ln 0,01$

soit $n \boxed{\geq} \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,76} \to$ à partir de 17!

Exercice 2 :

① ⓐ D'après le cours et les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

ⓑ On cherche $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

↳ on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (limite du type $\frac{1}{0^+}$)

Donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

② on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = e^x$ $\quad v(x) = x$
$\quad u'(x) = e^x$ $\quad v'(x) = 1$

On obtient :
$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

③ pour $x \in]0;+\infty[$, on a $e^x > 0$ et $x^2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

on calcule $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$

④ à l'aide du tableau, on doit pouvoir dire que :

- si $m = e$, l'équation a une unique solution
- si $m > e$, il y a 2 solutions
  (1 solution sur $]0;1]$
  et 1 solution sur $[1;+\infty[$)
- si $m < e$, il n'y a aucune solution
  (le nombre e est le minimum)

5 a) La droite Δ d'équation $y=-x$ a pour coefficient directeur (-1).

or le coefficient directeur d'une tangente est donné par le nombre dérivé.

Donc on cherche a tel que $f'(a)=-1$

soit $\frac{e^a(a-1)}{a^2}=-1$

soit $e^a(a-1)=-a^2 \rightarrow e^a(a-1)+a^2=0$

b) on a $g(x)=\underbrace{e^x(x-1)}+x^2$

↳ on applique $(uv)'=u'v+uv'$ pour cette partie.

→ on obtient $g'(x)=e^x(x-1)+e^x\times 1+2x$

$=e^x(x-1+1)+2x=e^x\times x+2x$

or on travaille sur $]0;+\infty[$ et on fait donc l'addition de termes positifs → on a $g'(x)>0$

on obtient donc :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-1 ↗ $+\infty$

on a $g(0)=e^0(0-1)+0^2$
$=-1$

et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

c) on applique le corollaire du TVI !

→ g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On a : $g(0)=-1$

et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Le nombre 0 appartient à l'intervalle image $]-1;+\infty[$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3 : Les bonnes réponses sont :

1-c 2-b 3-b 4-c 5-b

Voici quelques explications : à savoir que ce QCM n'est pas très ambitieux et on va dans cette correction ne pas chercher à aller plus loin.
Il existe bien d'autres QCM qui peuvent amener des révisions plus intéressantes.

Question 1 : dans le (a), c'est la même droite en fait.
dans le (b), les droites sont dans le plan (ASC)
dans le (d), les droites sont parallèles, donc coplanaires.

$\longrightarrow$ réponse (c)

Question 2 : on applique la formule générale d'un milieu

K, milieu de [SD] $\rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x_S+x_D}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ \dfrac{y_S+y_D}{2} = \dfrac{0+(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{z_S+z_D}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

L, milieu de [SC] $\longrightarrow$ $\left|\begin{array}{l} \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

et donc le point N, milieu de [KL], aura pour coordonnées

$\left|\begin{array}{l} \dfrac{0+1/2}{2} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{-1/2+0}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ $\rightarrow$ réponse (b)

Question 3 : une blague ?

on a $\overrightarrow{AS}$ $\begin{cases} x_S - x_A = 0-(-1) = 1 \\ y_S - y_A = 0 - 0 = 0 \\ z_S - z_A = 1 - 0 = 1 \end{cases}$ → réponse (b)

Question 4 : on peut voir que la réponse (c) correspond

car $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 0t \\ z = 1 + 1t \end{cases}$

↳ c'est le vecteur $\overrightarrow{AS}$.

↳ c'est le point S

Question 5 : on peut, par exemple, tester chaque point (S, C et B) en remplaçant x, y et z par les coordonnées respectives et on élimine au fur et à mesure les propositions.

pour S(0;0;1), on obtient :

(a) $0+1-1=0$ OK (b) $0+0+1-1=0$ OK

~~(c)~~ $0-0+1=0$ $\boxed{\text{FAUX}}$ (d) $0+1-1=0$ OK

(on élimine le (c))

↳ on fait la même démarche pour C, puis B et la seule proposition restante sera la réponse (b).

Exercice au choix → exercice A

① on calcule $U_1 = \frac{3}{4}U_0 + \frac{1}{4}\times 0 + 1 = \frac{3}{4}\times 1 + 1 = \frac{7}{4}$

$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{4}\times 1 + 1 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$

② ⓐ dans B3, on a la valeur de U_1

→ on écrit donc $\boxed{=(3/4)*B2+(1/4)*A2+1}$

pour U_0 pour 0

ⓑ La suite (U_n) semble être croissante.

③ ⓐ Initialisation : on vérifie que $0 \leq U_0 \leq 0+1$

→ c'est bon car $0 \leq 1 \leq 1$ OK

Hérédité : on suppose $n \leq U_n \leq n+1$

Montrons que $n+1 \leq U_{n+1} \leq n+2$ $(n+1)+1$

on part de : $n \leq U_n \leq n+1$

→ $\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}U_n \leq \frac{3}{4}(n+1)$

→ $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n$

soit $\underbrace{\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1}_{n} \leq \underbrace{\frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}n + 1}_{U_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1}_{}$

$= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}n + 1$

$= n + \frac{7}{4}$

On obtient : $n+1 \leq U_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$ $(\leq n+2)$

Donc on a bien la relation voulue !!

ⓑ On a donc $n \leq U_n \leq n+1$

et $n+1 \leq U_{n+1} \leq n+2$

soit $n \leq U_n \leq n+1 \leq U_{n+1} \leq n+2$

soit $U_n \leq U_{n+1}$ → (U_n) est bien croissante.

De plus, on sait que $U_n \geq n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Donc, par comparaison, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

ⓒ on a : $n \leq U_n \leq n+1$

soit $\frac{n}{n} \leq \frac{U_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$

soit $1 \leq \frac{U_n}{n} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{n}}$ → on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n} = 1$ en appliquant le théorème des gendarmes

qui tend vers 1^0

④ ⓐ on a $V_n = U_n - n$ donc on a $U_n = V_n + n$

On écrit donc : $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$ ne pas oublier !

$= \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$

$= \frac{3}{4}(V_n + n) + \frac{1}{4}n - n$

$= \frac{3}{4}V_n + \cancel{\frac{3}{4}n} + \cancel{\frac{1}{4}n} - \cancel{n}$

soit $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 0 = 1 - 0 = 1$

ⓑ on a donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

et donc $U_n = V_n + n$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$

Exercice au choix → exercice B

① pour la limite en $+\infty$, on a une forme indéterminée

→ on factorise $f(x)$ par x (c'est le terme prépondérant)

→ on obtient $f(x) = x\left(1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln x}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$

$$\underbrace{\underset{\downarrow}{1} + \underset{\downarrow}{\frac{4}{x}} - 4\underset{\substack{\downarrow \\ \text{croissance comparée}}}{\frac{\ln x}{x}} - \underset{\downarrow}{\frac{3}{x^2}}}_{\to 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

type $+\infty \times 1$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② on a $f(x) = x + 4 - 4\ln x - \frac{3}{x}$

→ $f'(x) = 1 - 4 \times \frac{1}{x} - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{1 \times x^2 - 4 \times x + 3}{x^2}$

soit $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

③ ⓐ on résout donc $x^2 - 4x + 3 = 0$

→ $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots\ldots$ etc...

On trouve $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

On obtient donc :

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	0	+	
x^2		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$6 - 4\ln 3 \approx 1,6$	↗	$+\infty$

On a : $f(1) = 1 + 4 - 4 \times \underbrace{\ln 1}_{=0} - \dfrac{3}{1} = 2$

$f(3) = 3 + 4 - 4\ln 3 - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln 3$.

(5) on a $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et en observant les variations, on constate que la fonction va "passer" 3 fois par cette valeur !

→ il y a donc 3 solutions pour $f(x) = \dfrac{5}{3}$

(4) pour la convexité de f, on calcule $f''(x)$.

→ on peut reprendre l'expression $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}$

→ on obtient $f''(x) = -4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$$= \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3} = \frac{4x-6}{x^3}$$

→ on résout $4x - 6 = 0$ → $x = 1,5$

on obtient le tableau de signes de f''.

x	0		$1,5$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
signes de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		CONCAVE		CONVEXE	

point d'inflexion de coordonnées $(1,5 \,;\, f(1,5))$

soit $\left(\dfrac{3}{2} \,;\, \underbrace{\dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}_{\approx 1,878}\right)$