Chapitre 8

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Les savoir-faire

80. Déterminer et utiliser la représentation paramétrique d'une droite.

81. Déterminer et utiliser une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal.

82. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

I. Représentations paramétriques

Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
Un point $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système d'équations s'appelle une représentation paramétrique de la droite d.

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
Exemple :
L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.
Soit les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$ et $B(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Vidéo

II. Équation cartésienne d'un plan

1. Caractérisation des points d'un plan

Propriété

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de $\mathscr{P}$. Un point M de l'espace appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

2. Equation cartésienne d'un plan

Définition - Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, tout plan $\mathscr{P}$ passant par un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ admet une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$. Vidéo

III. Positions relatives

1. Entre une droite et un plan

Propriété

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
d et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.

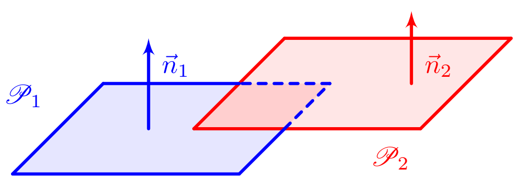
Exemple :
Dans un repère orthonormé, le plan (P) a pour équation $2x-y+3z-2=0$.
Soit $A(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ et $B(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan (P). Vidéo

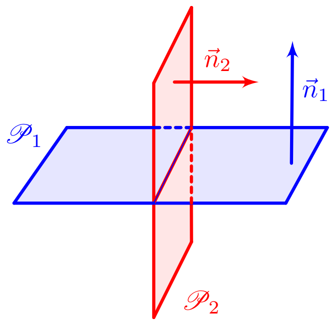
2. Entre deux plans

Propriété

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$:

- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.





Exemples :
On donne les équations cartésiennes de deux plans.
(P) : $-x+2y+z-5=0$.
(P') : $2x-y+3z-1=0$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d) des plans (P) et (P'). Vidéo

Exemple :
On donne les équations cartésiennes de deux plans.
(P) : $2x+4y+4z-3=0$.
(P') : $2x-5y+4z-1=0$.

Démontrer que les plans (P) et (P') sont orthogonaux. Vidéo