Chapitre 7

Dérivation, continuité et convexitée

Les savoir-faire

70. Connaître et utiliser les dérivées des fonctions composées.
71. Etudier et utiliser la convexité d'une fonction.
72. Etudier une suite définie par une relation de récurrence.
73. Connaître et utiliser le TVI.

I. Compléments de dérivation

1. Fonctions composées

Définition : composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, on ait $u(x) \in J$.
La fonction composée de u suivie de v, notée $v \circ u$, est la fonction définie par : $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

$$x \mapsto u(x) \mapsto v(u(x))$$
$$x \longrightarrow v \circ u(x)$$

Exemples :

a. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f. Vidéo

b. On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x.. Vidéo

2. Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x de I, $u(x) \in J$ et v une fonction définie et dérivable sur J. Alors

$$f = v \circ u \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout } x \in I,$$
$$f'(x) = (v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x),$$

Autrement dit, $f' = (v' \circ u) \times u'$.

Exemple :
Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. Vidéo

3. Fonctions $\sqrt{u}$, u^n et e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n désigne un entier relatif non nul.

Fonctions composées	**Dérivées**
u^2	$2uu'$
u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$) et $u \neq 0$ si $n < 0$	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$ $(u > 0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple :
Déterminer la dérivée des fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ et $g(x) = (2x^2 + 3x)^4$. Vidéo

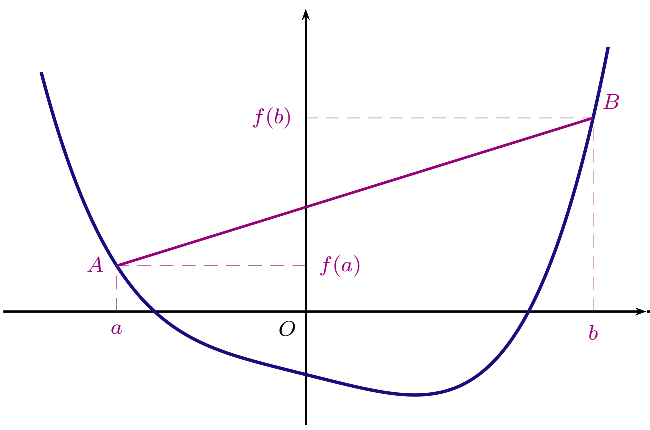
4. Dérivée seconde

Définition
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. La fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f'. Elle est appelée dérivée seconde de f.

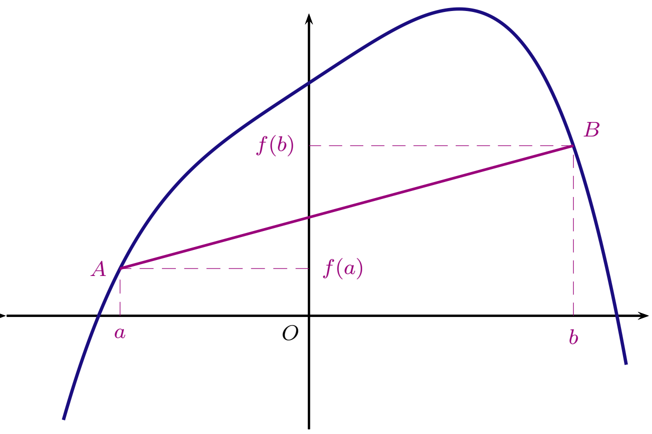
II. Convexité d'une fonction

1. Approche graphique

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe.
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est **en-dessous** de la sécante (AB).
- f est **concave** sur I si si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est **au-dessus** de la sécante (AB).



f est convexe.



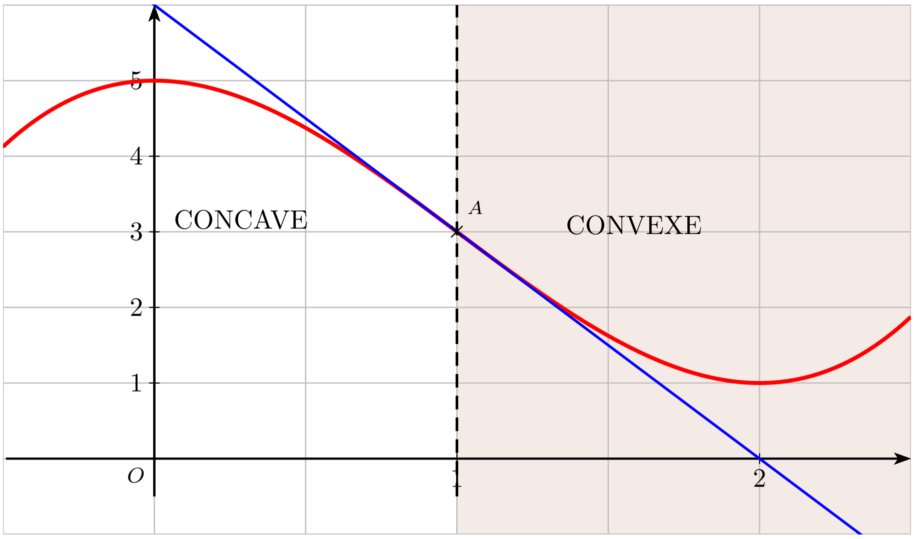
f est concave

Exemples :
La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
La fonction inverse est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.
La fonction cube est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et A un point de sa courbe $\mathscr{C}$.
A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.



3. Convexité et dérivées

Propriétés

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I.
- f' est positive sur I.
- f' est croissante sur I.

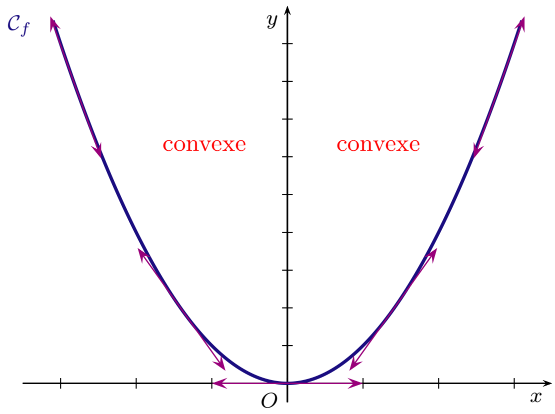
- f est concave sur I.
- f' est négative sur I.
- f' est décroissante sur I.

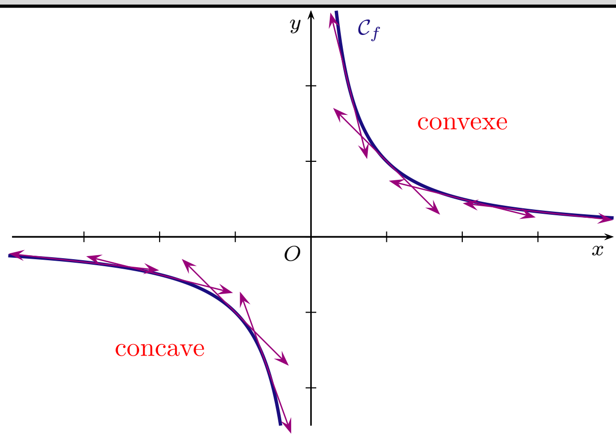
4. Convexité et tangentes

Propriétés

Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.

- f est convexe sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- f est concave sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est en-dessous de toutes ses tangentes.





Remarque : Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît "de plus en plus vite" sur I. Les pentes des tangentes à sa courbe augmentent quand les abscisses augmentent.
Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît "de moins en moins vite".

5. Point d'inflexion

Propriétés

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe et a un réel de I.
- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Exemple :
Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de x milliers de clés USB est :

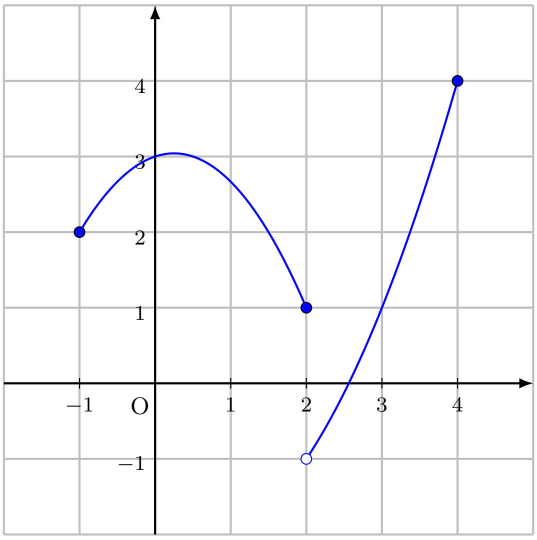
$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$

Etudier la convexité de C. Interpréter. Vidéo

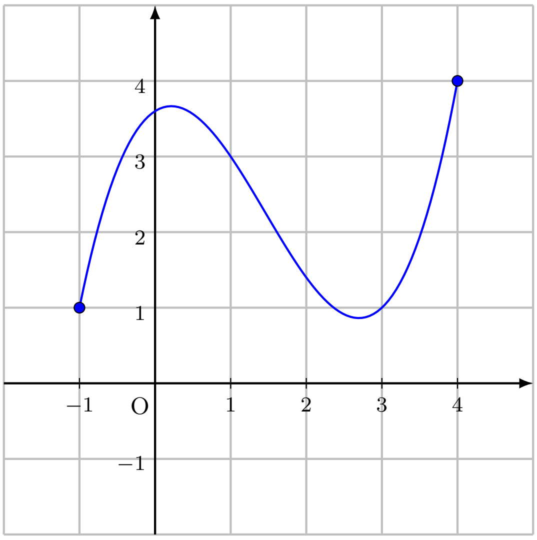
III. Fonctions continues

Définition

La fonction f est **continue** sur l'intervalle I si elle est définie sur I et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu » sans lever le crayon sur cet intervalle.



f n'est pas continue sur $[-1\,;4]$



f est continue sur $[-1\,;4]$

Remarque :
f est continue en un réel a lorsque f est définie en a et admet une limite en a égale à $f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Propriété : continuité et dérivabilité

Toute fonction dérivable en a est continue en a. (la réciproque est fausse)

Propriété : continuité et suites convergentes

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Propriété : continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes et la fonction racine carrée sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur les intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2 \text{ pour } x < 3 \\ x-4 \text{ pour } 3 \leqslant x < 5 \\ -2x+13 \text{ pour } x \geqslant 5 \end{cases}$.

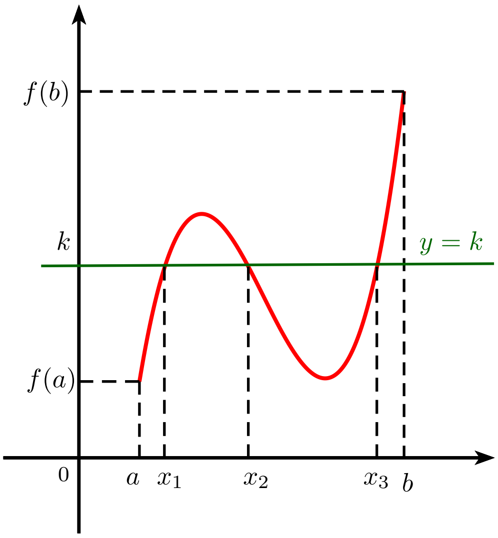
La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Vidéo

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cas d'un intervalle fermé

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\ ;\ b]$.

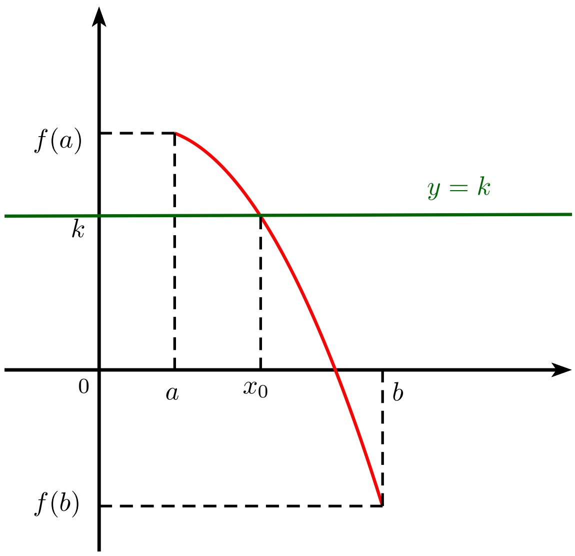


L'équation $f(x) = k$ admet trois solutions : x_1, x_2 et x_3.

2. Cas d'un intervalle fermé

Corollaire du TVI

Soit f une fonction continue **et strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.



L'équation $f(x) = k$ admet une unique solution : x_0.

3. Extension à d'autres intervalles

Théorème

Soit a un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$ et f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a\,;b[$ et dont les limites en a et b existent.
Alors pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a\,;b[$.

Exemple :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$ k $\searrow$	$-\infty$

Pour tout réel $k \in]-\infty\ ;\ 1[$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+6$.
Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$. Vidéo

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
1. Démontrer que $f'(x)=3x(x-2)$ et en déduire les variations de f sur $]2\ ;\ 3[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]2\ ;\ 3[$.
3. Donner un encadrement de α au centième. Vidéo