Chapitre 4

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Les savoir-faire

40. Représenter et utiliser une décomposition linéaire de vecteurs donnés pour résoudre un problème.

41. Étudier les positions relatives de droites et de plans.

42. Utiliser les coordonnées pour résoudre des problèmes (alignement, colinéarité, coplanarité,...).

I. Vecteurs de l'espace

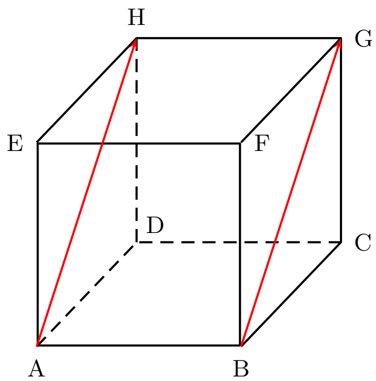
1. Définition

Définition

Soient A et B deux points de l'espace.
On associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, si et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme éventuellement aplati.
On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Remarque :
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

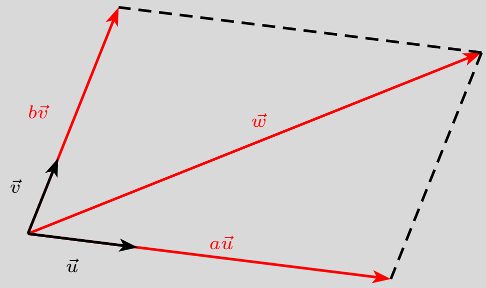
Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$ les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car $ABGH$ est un rectangle.



2. Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

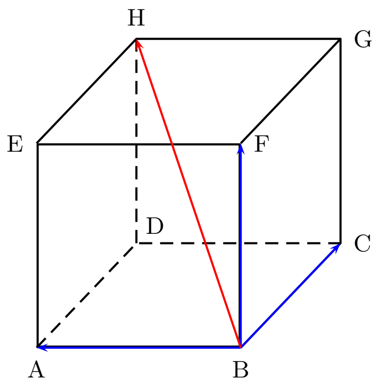


Remarques :

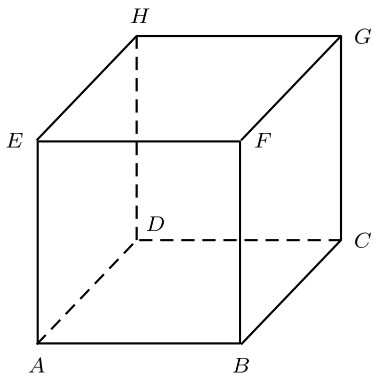
- On dit aussi que les trois vecteurs sont coplanaires.
- Dans le cas où $\vec{v} = a\vec{u}$ on dit que les vecteurs sont colinéaires.

Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$, une écriture du vecteur $\overrightarrow{BH}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ est :

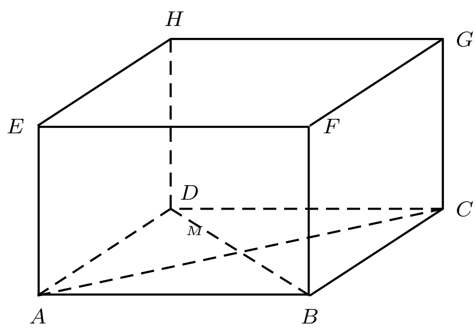
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$$



Exemple :
A l'aide du cube représenter les vecteurs donnés par :
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
$\vec{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$ Vidéo



Exemple :
Dans le parallélépipède, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. Vidéo



II. Droites et plans de l'espace

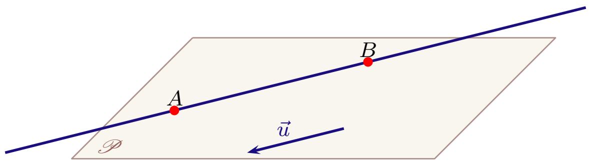
1. Droites de l'espace

Définition

Une droite de l'espace est définie :
- soit par la donnée de deux points distincts ;
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

Propriété : caractérisation d'une droite

La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.



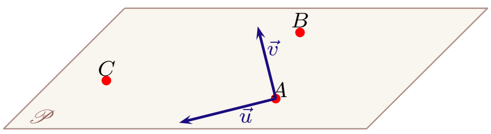
2. Plans de l'espace

Définition

Un plan de l'espace est défini :
- soit par trois points non alignés A, B et C ;
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété : caractérisation d'un plan

Le plan défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

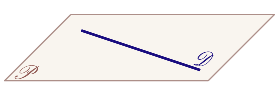
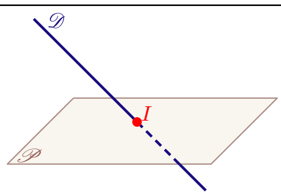
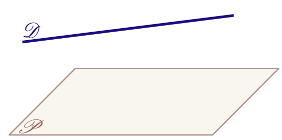


III. Positions relatives de droites et plans.

1. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriétés

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Trois cas peuvent se présenter :
- — la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$;
- — la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants ;
- — la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ n'ont aucun pont commun.

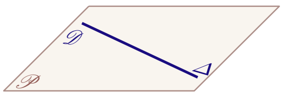
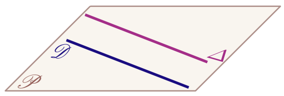
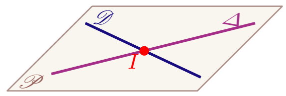
 $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	 $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{I\}$	 $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont disjoints : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$

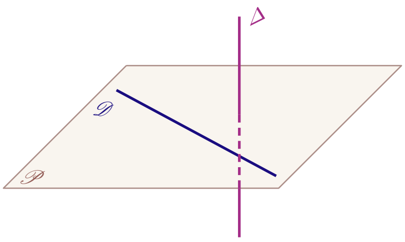
2. Positions relatives de deux droites

Deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans le même plan.

Propriétés

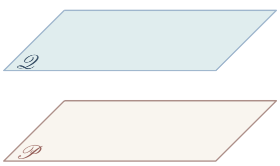
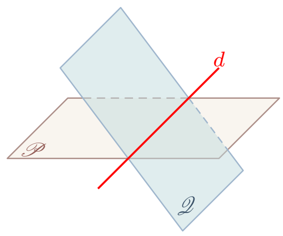
Soient $\mathscr{D}$ et Δ deux droites de l'espace. Quatre cas peuvent se présenter :
- les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues ;
- les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles ;
- les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes ;
- les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.

Droites coplanaires		
Droites parallèles		Droites sécantes
 $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues	 $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$	 $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes : $\mathscr{D} \cap \Delta = \{I\}$

Droites non coplanaires
 $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$

3. Positions relatives de deux plans

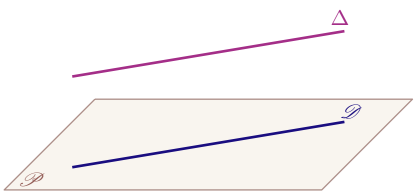
Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Plans parallèles		Plans sécants
 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus	 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont strictement parallèles	 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants selon une droite d

4. Droite parallèle à un plan

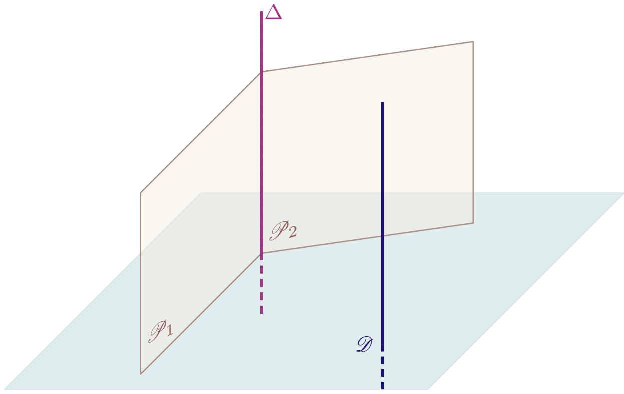
Propriétés

Si une droite Δ est parallèle à une droite $\mathscr{D}$ incluse dans un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.



Propriétés

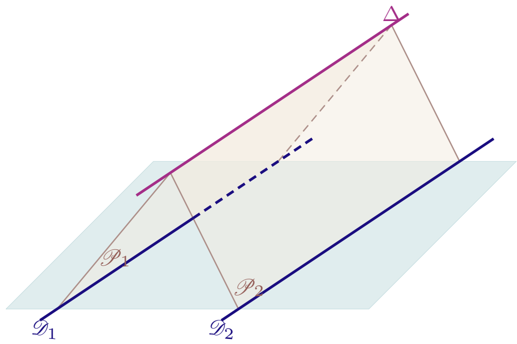
Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors elle est parallèle à leur intersection.



5. Droites parallèles

Théorème du toit

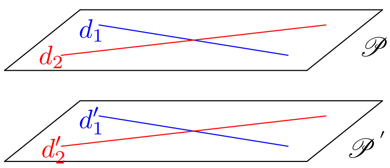
Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites parallèles.
Soit $\mathscr{P}_1$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, alors leur droite d'intersection est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



6. Plans parallèles

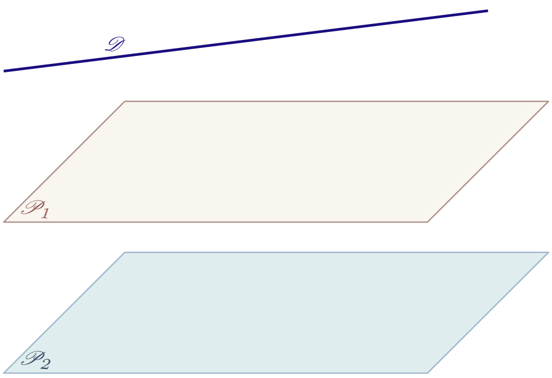
Propriétés

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



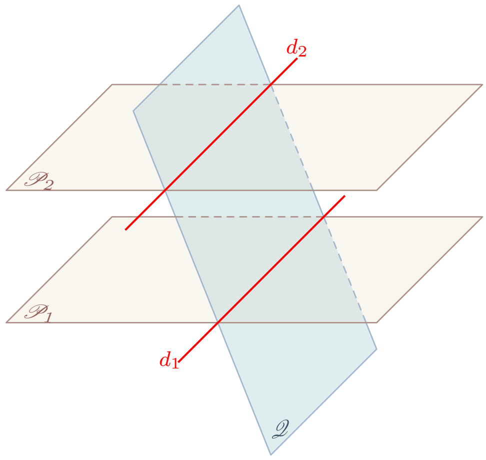
Propriétés

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles. Alors, toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à $\mathscr{P}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}_2$.



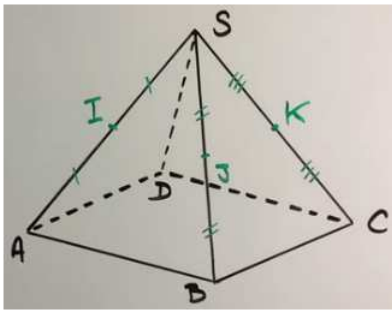
Propriétés

Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans parallèles, alors tout plan $\mathscr{Q}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}_1$, coupe le plan $\mathscr{P}_2$ et les droites d'intersection sont parallèles.



Exemple :

$SABCD$ est une pyramide.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. Vidéo

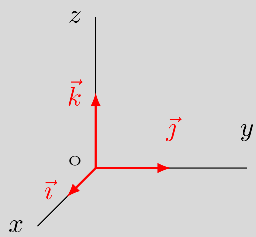


IV. Repérage dans l'espace

1. Repère

Repère

Soit O un point de l'espace et trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ non coplanaires.
On dit que $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace et que $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace.

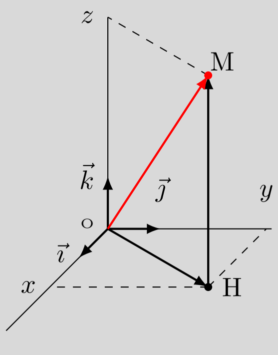


Coordonnées

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de nombres réels tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.



x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M.
On note $M(x\,;\,y\,;\,z)$.

Propriétés

Soit $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

— Pour tous points A $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

— Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et tout réel λ :

$$\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}\ ;\ \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

— Si I est le milieu de $[AB]$ alors :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Exemples :

a. Dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$. Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires. Vidéo

b. Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.

I est le milieu de $[CG]$. M et N son définis par : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{NF}=2\overrightarrow{FG}$.
Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points. Placer le point $K(1;3;-1)$. Vidéo