# Chapitre 10

# Loi binomiale

### Les savoir-faire

**100.** Modéliser une situation et calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes

**101.** Calculer des probabilités du type $p(X = k)$, $p(X > k)$ ou $p(X < k)$ pour une v.a. $X$ suivant une loi binomiale.

**102.** Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil.

## I. Succession d'épreuves indépendantes

### 1. Définition et propriété

**Définition**

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

**Univers et issues d'une succession d'épreuves indépendantes :**
On considère $n$ épreuves successives indépendantes $E_1$, $E_2$, .... , $E_n$.
L'univers $E$ de cette succession de $n$ épreuves successives indépendantes est le produit cartésien : $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.
Les issues de $E$ sont les $n-$uplets $(x_1; x_2; ....; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout $i$ entier naturel avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

**Propriété**

Dans une succession de $n$ épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes $x_1$, $x_2$, ...., $x_n$.

### 2. Exemple

On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

— Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
— L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est : $\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
— $(2;5;7)$ est une issue associée à cette succession d'épreuves indépendantes.
— La probabilité de cette issue est $p(2;5;7) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{192}$.

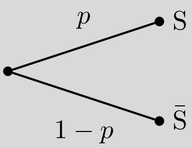
# II. Epreuve de Bernoulli

## 1. Définitions

**Définition**

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p$, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$ ;
- l'autre appelée « échec » notée $\bar{\mathrm{S}}$, dont la probabilité est $p(\bar{\mathrm{S}}) = 1 - p$.




**Définition**

Soit $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque $S$ est réalisé et 0 sinon.

La loi de probabilité de $X$ est donnée sous la forme du tableau :

| $k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(X = k)$ | $1-p$ | $p$ |

On dit que la variable $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$.

# III. Loi binomiale de paramètres $n$ et $p$

## 1. Schéma de Bernoulli

**Définition**

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres $n$ et $p$ la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètre $p$, identiques et indépendantes.

**Remarque :** On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités de l'autre.

**Exemple :**

On tire 3 fois de suite une carte avec remise dans un jeu de 4 cartes (dont une représente le poisson Nemo.
On considère comme succès « Obtenir le poisson Nemo ».
$X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Calculer $P(X = 2)$. Vidéo

## 2. Coefficient binomial

**Définition**

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à $k$ succès. Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit : « $k$ parmi $n$ ».

**Exemple :**

Calculer $\binom{8}{1}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{5}{2}$. Vidéo

# IV. Loi binomiale

## 1. Définition et propriété

**Définition**

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$.
Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès. On dit que $X$ suit une *loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.*

**Propriété**

Soit $X$ une v.a. suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Alors, pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ :
$p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

**Exemple :**
On dispose dans une urne 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. On tire 4 fois de suite avec remise une boule de l'urne.
$X$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages gagnants. Calculer $P(X=3)$. Vidéo