Continuité et convexité d'une fonction

Théorème des valeurs intermédiaires

• Si f est **continue** sur $[a\,;b]$ et **si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$**, alors il existe au moins un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

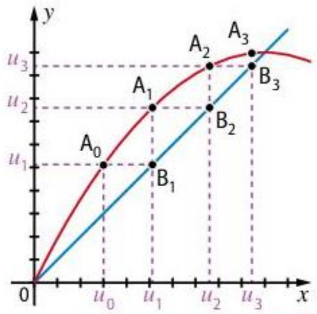
Corollaire

• Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a\,;b]$ et **si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$**, alors il existe un unique réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Suites et fonctions continues

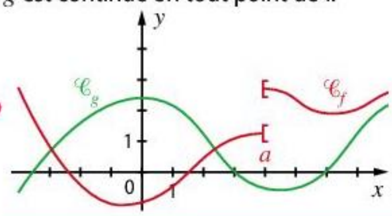
Si une suite (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors (v_n) définie par $v_n=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ converge vers $f(L)$.

Construction des premiers termes de la suite (u_n) définie par u_0 et la relation $u_{n+1}=f(u_n)$: on utilise la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y=x$.



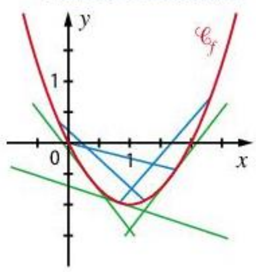
Continuité

• f n'est pas continue en a.
• g est continue en tout point de I.



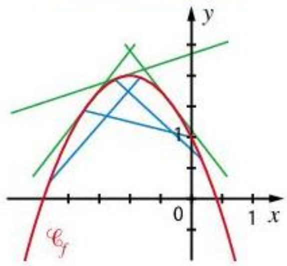
Convexité

Fonction convexe



$\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.

Fonction concave



$\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de ses sécantes et au-dessous de ses tangentes.

Point d'inflexion : point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente ; f change de convexité.

Convexité et dérivabilité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
• f est convexe sur I, équivaut à f' est croissante sur I, équivaut à f'' est positive sur I ;
• f est concave sur I, équivaut à f' est décroissante sur I, équivaut à f'' est négative sur I ;
• $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion équivaut à f'' s'annule en changeant de signe en a.