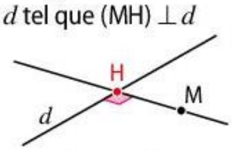
# Orthogonalité dans l'espace

### Projeté orthogonal

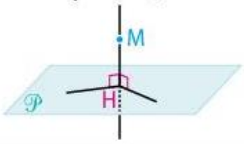
• **Projeté orthogonal de M sur une droite** $d$

Point H de $d$ tel que $(\mathrm{MH}) \perp d$




• **Projeté orthogonal de M sur un plan** $\mathcal{P}$

Point H de $\mathcal{P}$ tel que $(\mathrm{MH}) \perp \mathcal{P}$




### Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et $k$ est un réel, alors :

**(1) Bilinéarité** : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

**(2) Symétrie** : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

**(3)** Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=\|\vec{u}\|^2$.

**(4)** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

**(5)** Dans un repère orthonormé :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ avec $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

### Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

• Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ;

• sinon $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

### Vecteur normal et équation de plan

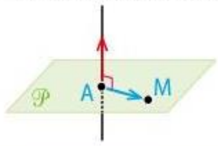
$\mathcal{P}$ plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ équivaut à $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

• $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

• Dans un repère orthonormé, équation d'un plan $\mathcal{P}$ :

$ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.




### Orthogonalité de droites et de plans

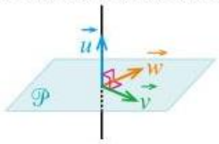
$d$ et $d'$ droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\mathcal{P}$ plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

**(1)** $d\perp d'$ équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$

**(2)** $d\perp\mathcal{P}$ équivaut à $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0\end{cases}$ équivaut à :

$\vec{u}\cdot\vec{t}=0$ pour tout vecteur $\vec{t}$ de la direction de $\mathcal{P}$.



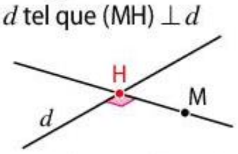

**(3)** Plan médiateur de [AB] : plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB).


# Orthogonalité dans l'espace

### Projeté orthogonal

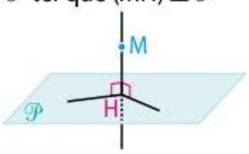
• **Projeté orthogonal de M sur une droite** $d$

Point H de $d$ tel que $(\mathrm{MH}) \perp d$



• **Projeté orthogonal de M sur un plan** $\mathcal{P}$

Point H de $\mathcal{P}$ tel que $(\mathrm{MH}) \perp \mathcal{P}$



### Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et $k$ est un réel, alors :

**(1) Bilinéarité** : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

**(2) Symétrie** : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

**(3)** Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=\|\vec{u}\|^2$.

**(4)** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

**(5)** Dans un repère orthonormé :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ avec $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

### Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

• Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ;

• sinon $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

### Vecteur normal et équation de plan

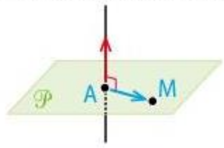
$\mathcal{P}$ plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ équivaut à $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

• $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

• Dans un repère orthonormé, équation d'un plan $\mathcal{P}$ :

$ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.



### Orthogonalité de droites et de plans

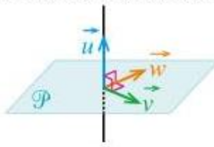
$d$ et $d'$ droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\mathcal{P}$ plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

**(1)** $d\perp d'$ équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$

**(2)** $d\perp\mathcal{P}$ équivaut à $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0\end{cases}$ équivaut à :

$\vec{u}\cdot\vec{t}=0$ pour tout vecteur $\vec{t}$ de la direction de $\mathcal{P}$.



**(3)** Plan médiateur de [AB] : plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB).