PROBABILITÉS

12

Somme de variables aléatoires

Les savoir-faire du chapitre

- **120.** Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires.
- **121.** Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.
- **122.** Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

Le problème de Nabolos

Ervin, qui est entraineur de basket et fin mathématicien, possède dans son équipe deux meneurs de jeu, Djamil et Félicien. Ces deux joueurs ne sont jamais ensembles sur le terrain au cours des matchs. En compilant les données de la saison précédente, il a remarqué que le nombre de lancers francs marqués par ces deux joueurs suit une loi binomiale.

Le nombre de lancers francs marqués par Djamil suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,8$.

Le nombre de lancers francs marqués par Félicien suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,75$.

On remarque que les paramètres diffèrent pour ces deux joueurs car leur temps de jeu n'est pas le même et leur type de jeu aussi.

Ervin se demande alors "Si on joue un grand nombre de matchs dans la saison, combien ces deux meneurs vont-ils, en moyenne, rapporter de points à l'équipe sur les lancers francs ? Et quel sera l'écart type ?"

Aider Ervin à répondre à cette question.

S'entraîner

120 **Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires.**

En période de réglage de ses machines, le contrôleur de qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce , si elle a un défaut A, un défaut B.

Compte tenu du grand nombre de pièces fabriquées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.

X (resp. Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défaut A (resp. B).

Soit S la variable aléatoire somme. On a donc $S = X + Y$.

Déterminer la loi de probabilité de S.

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	0,07	0,18	0,17	0,42
1	0,15	0,20	0,23	0,58
Loi de Y	0,22	0,38	0,40	1

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

120 **Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires.**

Une urne A contient quatre boules numérotées 1 ; 2 ; 2 et 3.

Une urne B contient cinq boules numérotées 2 ; 4 ; 5 ; 5 et 7.

On tire une boule dans chaque urne. Compléter le tableau à double entrée pour lister toutes les sommes possibles, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S qui, à chaque tirage associe la somme des numéros obtenus.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

A \ B	2	4	5	5	7
1					
2					
2					
3					

.....
.....
.....

121 **Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.**

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous. Les variables aléatoires Z et T sont définies par :

$$Z = -3X \qquad T = 2X + 2$$

x_i	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$0,15$	$0,36$	$0,27$	0,22

Calculer l'espérance , la variance et l'écart-type :

1) de X **2)** de Z **3)** de T

.....
.....
.....
.....
.....
.....

122 **Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.**

Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et les deux derniers secteurs valent -400 points. On fait tourner 4 fois de suite cette roue et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers de roues.

Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en points à la fin du jeu.

Décomposer Z en une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes puis calculer $E(Z)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

122 **Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.**

X_1, X_2, ..., X_{300} sont 300 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,23$.

Quelle loi suit $X = X_1 + X_2 + ... + X_{300}$? en déduire $E(X)$.

.....
.....
.....
.....