GÉOMÉTRIE

6

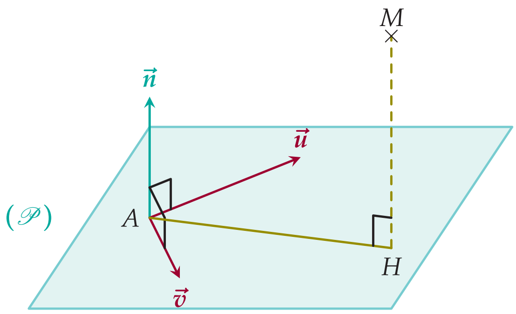
Orthogonalité et distances dans l'espace

Les savoir-faire du chapitre

- **60.** Calculer et utiliser un produit scalaire.
- **61.** Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.
- **62.** Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.
- **63.** Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.

Le problème de Nabolos

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, simultanément orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1. Démontrer que $\vec{n}$ est aussi orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$.
En déduire que si M est un point de $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.
2. Démontrons maintenant la réciproque.
Énoncer cette réciproque.
Soit M un point de l'espace.
On considère le point H, projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$.
Démontrer, en calculant $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}$, que si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0$, alors $HM=0$ puis en déduire que $M\in(\mathscr{P})$.
Énoncer la propriété démontrée.

S'entraîner

60 **Calculer et utiliser un produit scalaire.**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1) $\|\vec{u}\|$ **2)** $\|\vec{v}\|$ **3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **4)** θ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

60 **Calculer et utiliser un produit scalaire.**

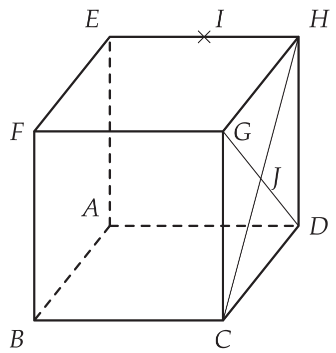
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **4)** $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$ **5)** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$

3) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$ **6)** $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD}$



....

....

....

....

....

....

....

....

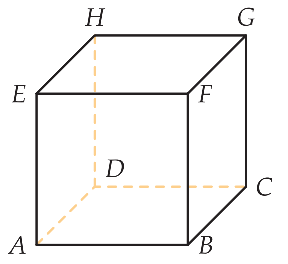
....

....

....

61 **Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.**

$ABCDEFGH$ est un cube.



1) a) Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;
b) Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;
c) Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;
d) Citer deux droites orthogonales au plan (AFG).

2) a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).
b) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

3) Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.
a) (EG) et (GC) ;
b) (EB) et (EG) ;
c) (AF) et (BC) ;
d) (AC) et (HF) ;
e) (BD) et (EC) ;
f) (CE) et (AG).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

62 **Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

....
....
....
....
....
....
....
....

S'entraîner

63 **Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.**

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(2;3;3)$, $B(-1;17;-17)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Démontrer que le point $H(-9;5;-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.

2) **a)** Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$

b) En déduire la distance du point B au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit $C(5;11;-5)$.

a) Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).

b) Calculer la distance du point H à la droite (BC).