ANALYSE

14

Intégration

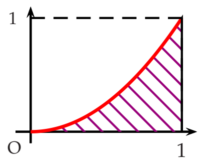
Les savoir-faire du chapitre

- **140.** Calculer une intégrale à l'aide d'aires simples.
- **141.** Calculer une intégrale à l'aide de primitives.
- **142.** Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
- **143.** Déterminer une aire à l'aide du calcul intégral.
- **144.** Encadrer une intégrale.
- **145.** Calculer et utiliser la valeur moyenne d'une fonction.

L'intro de Nabolos

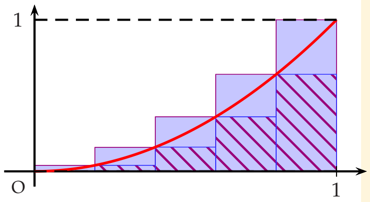
Soit f la fonction carré définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.

1. Donner un encadrement grossier de l'aire $\mathscr{A}$ hachurée.



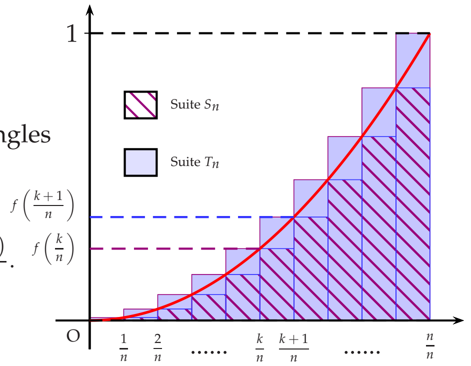
2. On subdivise l'intervalle $[0\,;\,1]$ en 5 intervalles de même amplitude $\Delta x = 0,2$.
Sur chacun des intervalles $[x_k\,;\,x_{k+1}]$ avec $0 \leqslant k < 5$, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction carrée.

Compléter le tableau ci-dessous et déterminer l'aire $\mathscr{A}_1$ somme des aires des rectangles hachurés et $\mathscr{A}_2$ somme des aires des rectangles bleus. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.



x_k	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
$f(x_k)$						

3. On subdivise l'intervalle $[0\,;\,1]$ en n intervalles.
On obtient deux séries de rectangles et on définit deux suites :
La suite (S_n) des rectangles hachurés et la suite (T_n) des rectangles bleus.
Montrer que $S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$ et $T_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$.
En déduire la valeur de $\mathscr{A}$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



S'entraîner

140 **Calculer une intégrale à l'aide d'aires simples.**

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 4$.

1) f est définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{5}{2}$.
2) f est affine définie pour tout réel x par : $f(x) = -0,4x + 3,6$.

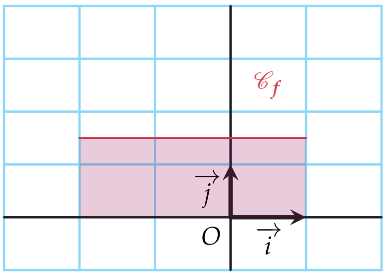
....
....
....
....
....
....

140 **Calculer une intégrale à l'aide d'aires simples.**

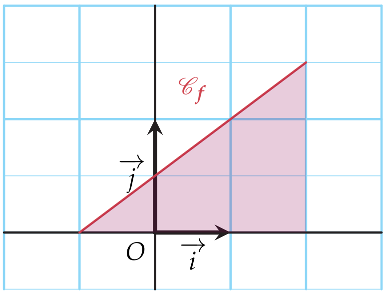
Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1) l'expression de la fonction f représentée en rouge ;
2) la description du domaine coloré ;
3) l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;
4) l'aire de ce domaine, en u.a.

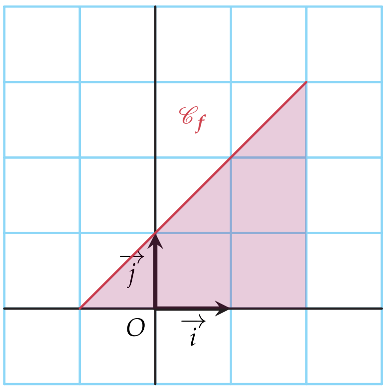
a)



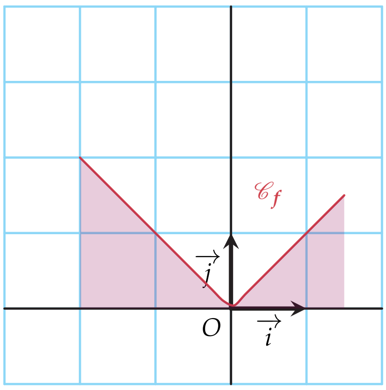
c)



b)



d)



....
....
....
....

141 **Calculer une intégrale à l'aide de primitives.**

Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide de primitives :

1) $\int_{-2}^{4} x \, dx$
2) $\int_{e}^{2e} \frac{1}{x} + 1 \, dx$
3) $\int_{4}^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$
4) $\int_{0}^{2} 2t^2 + 1 \, dt$
5) $\int_{-\pi}^{0} \sin(t) \, dt$
6) $\int_{0}^{2} 3e^x \, dx$
7) $\int_{-4}^{4} u^3 + 2u \, du$
8) $\int_{1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2} \, dx$

142 **Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.**

Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

1) $\int_{0}^{\pi} x \sin(x) \, dx$
2) $\int_{1}^{e} x \ln(x) \, dx$
3) $\int_{1}^{e} \ln(x) \, dx$
4) $\int_{0}^{\ln(2)} (x-1)e^x \, dx$

S'entraîner

143 **Déterminer une aire à l'aide du calcul intégral.**

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

144 **Encadrer une intégrale.**

On considère $I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1) Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0 : 1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

2) En déduire un encadrement de I.

....

....

....

....

....

....

....

....

145 **Calculer et utiliser la valeur moyenne d'une fonction.**

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,6]$ par : $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1) Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur $[0\,;\,6]$.

2) Donner une interprétation de ce résultat.

....

....

....

....

....

....