MATHEMATIQUES

Dérivation, convexité et continuité : les démonstrations

Si une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I alors toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ sont en dessous de $\mathscr{C}_f$.

Soit $a \in I$.
Soit $\mathcal{T}_a$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Ainsi :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

On pose $d(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.
La fonction d est définie, continue et dérivable sur I, car la fonction f est définie, continue et dérivable sur I.
Soit $x \in I$.
$d'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Comme la fonction f' est dérivable sur l'intervalle I, la fonction d' l'est aussi.
Ainsi $d''(x) = f''(x)$.
La fonction f est convexe sur I, donc f'' est positive sur l'intervalle I.
Comme $d''(x) = f''(x)$, on a que la fonction d'' est positive sur l'intervalle I.
Ainsi la fonction d' est croissante sur I.
Or $d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x		a	
$d'(x)$	↗	0	↗

On en déduit alors que :
- Si $x \geqslant a$, alors $d'(x) \geqslant 0$ et donc la fonction d est croissante sur $[a;+\infty[$.
- Si $x \leqslant a$, alors $d'(x) \leqslant 0$ et donc la fonction d est décroissante sur $]-\infty;a]$.

Or $d(a) = f(a) - (f'(a)(a-a) + f(a)) = 0$.
Cela permet d'obtenir le tableau suivant :

x		a	
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	↘	0	↗

Donc $d(x) \geqslant 0$.
D'où $f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \geqslant 0$.
C'est pourquoi $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.
Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{T}_a$.
On vient de démontrer pour toutes les valeurs de $a \in I$, les tangentes $\mathcal{T}_a$ sont sous la courbe $\mathscr{C}_f$.
Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I.