

MATHÉMATIQUES

Combinatoire et dénombrement : les démonstrations

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Deux méthodes, l'une ensembliste, l'autre algébrique :

1. Soit E un ensemble fini à $n \geq 2$ éléments et a un élément de E .

Les ensembles à p éléments de E se partagent en deux parties :

— celles ne contenant pas a , il y en a $\binom{n-1}{p}$;

— celles contenant a , il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.

Donc, il y a $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ ensembles de p éléments choisis parmi n , d'où le résultat.

2. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \\ &= \\ &= \\ &= \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

Remarque :

On démontre ainsi que pour tout n et p , le nombre $\binom{n}{p}$ est un entier par récurrence en posant pour propriété

$\mathcal{P}(n)$ « pour tout $p \in [[0; n]]$, $\binom{n}{p}$ est un entier ».

2. Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

• Une partie de E peut posséder 0 ou 1 ou 2 ou n éléments. Pour un nombre entier k tel que $k \leq n$, le nombre de parties à k éléments est $\binom{n}{k}$. Le nombre total de parties de E est ainsi :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

• Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les éléments de E .

On constitue une partie de E en spécifiant, pour chacun des éléments de E , s'il appartient ou non à cette partie. pour l'élément x_1 , on a deux choix (le prendre ou pas), de même que pour x_2 et ainsi de suite jusqu'à x_n . Il y a donc 2^n parties différentes de E en les constituant de la sorte.

• Ainsi : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$