Méthode
1 Déterminer une intégrale par calcul d'aire

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0,5x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-2}^4 (3-0,5x)\,\mathrm{d}x$

Solution

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction *f* dans un repère orthogonal et identifier le domaine sous la courbe.

2 Vérifier que la fonction est continue et positive sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.

3 Déterminer l'aire du domaine sous la courbe

Méthode
2 Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

Énoncé

En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f et tracer les rectangles inférieurs et supérieurs.

2 Calculer l'aire des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

Méthode 3 Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx$ **b)** $\int_{1}^{e}\frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

Conseils & Méthodes

1. Chercher une primitive de f notée *F*.
2. Calculer l'intégrale c'est calculer *F*(4) – *F*(–1).
3. Un candidat primitive est ln (*v*). $(\ln(v(x)))' = \frac{2x+2}{x^2+2x}$ d'où une primitive de *g*.
4. Calculer H(e) – H(1).

Méthode 4 Utiliser la relation de Chasles

Énoncé

Soit la fonction *f*, continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<0\\ e^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$. Déterminer $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$.

Conseils & Méthodes

1. Décomposer l'intervalle d'intégration [–3 ; 5] en intervalles sur lesquels la fonction ne change pas d'expression.
2. Calculer chaque intégrale séparément.

Méthode

5 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer la valeur moyenne m de la fonction f sur $[2 ; 5]$.

2. Donner une interprétation géométrique.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule de la moyenne.

2 Vérifier que la fonction f est positive pour interpréter la valeur moyenne.

Méthode

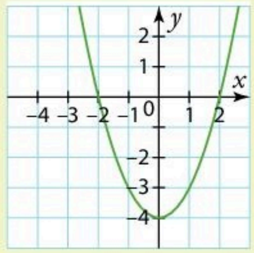
6 Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Énoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer :

a) l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

b) l'aire $\mathscr{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = 1$.



Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x)$ entre -2 et 2.

2 Écrire l'égalité entre aire et intégrale. f étant négative, c'est l'opposé de l'intégrale de f qui est égale à l'aire

3 Décomposer l'intervalle $[-5 ; 1]$ en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant, puis calculer l'intégrale ou son opposé sur chacun des intervalles.

Méthode 7

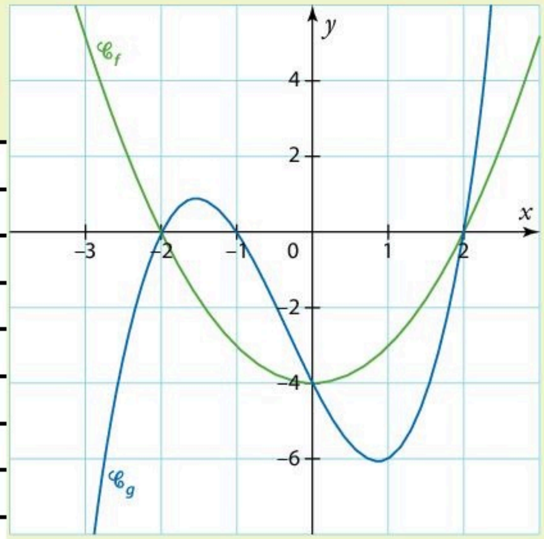
Calculer une aire entre deux courbes

Énoncé

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



Conseils & Méthodes

1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.
2. Écrire une égalité entre intégrales et aire en décomposant l'intervalle initial suivant le signe de $f - g$.
3. Calculer les intégrales.

➥ Thème 4

Méthode

8 Interpréter une intégrale

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $f(x) = 4\ln(3x + 1) - x + 3$.

1. On note F la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

2. On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

D'après Bac ES 2012

Conseils & Méthodes

1 On calcule la dérivée de F

2 On étudie les unités du problème.

↪ Thème 1