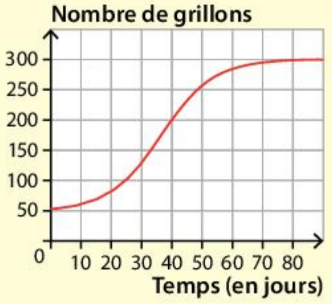
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Élever des insectes comestibles LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Introduire la notion de convexité.

Très soucieuse des problèmes d'écologie, Jeanne décide de se lancer dans un élevage de grillons comestibles. Pour cela, elle décide de mettre au point un écosystème miniature dans des vivariums à l'intérieur desquels ses grillons peuvent croître et se multiplier. Elle étudie les populations de grillons dans plusieurs vivariums et en tire une modélisation par une fonction f exprimant le nombre de grillons en fonction du temps en jours.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 90] par $f(t)=\dfrac{250}{1+83e^{-0,12t}}+50$ et que cette fonction est dérivable.

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f comme ci-dessous dans un logiciel de géométrie.



2. **a.** Tracer les points A, B, C, D, E et F de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 10, 30, 40, 50 et 60.
b. Tracer les droites (AB), (CD) et (EF) et conjecturer à l'aide de la fenêtre *Algèbre* leurs coefficients directeurs.
c. En déduire les vitesses moyennes de croissance de la population de grillons entre 0 et 10 jours, puis entre 30 et 40 jours et enfin entre 50 et 60 jours.
d. Décrire, à l'aide du graphique, l'évolution de cette vitesse.
3. On considère maintenant les segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$.
Décrire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de ces segments.
4. **a.** Graphiquement, déterminer la période de temps sur laquelle la croissance de la population est accélérée et la période sur laquelle elle est ralentie. Justifier la réponse.
b. Établir un lien entre l'accélération ou la décélération de la croissance de la population (question **2**) et la position par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$ des segments joignant deux points quelconques de la courbe $\mathscr{C}_f$ (question **3**).

Situation 2 Étudier la position des tangentes LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Caractériser la convexité par la position des tangentes.

On souhaite étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\left(x^2-1\right)e^{-0,5x}+1.$$

1. Dans un logiciel de géométrie, tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
Conjecturer la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Créer un curseur a compris entre –5 et 20 et placer le point de coordonnées $A(a\ ;\ f(a))$.
b. Construire la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point A.
c. Faire varier le curseur et observer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}_a$.
Quel lien peut-on faire entre la position relative de la tangente et la convexité de f ?
3. On considère le point P de coordonnées $(1\ ;\ f(1))$.
a. Construire la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}_f$ au point P.
b. Observer la position relative de la tangente $\mathscr{T}_1$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$. Quelle remarque peut-on faire ?
c. Existe-t-il un autre point pour lequel on peut faire la même remarque qu'à la question **3.b** ? Si oui, conjecturer son abscisse.

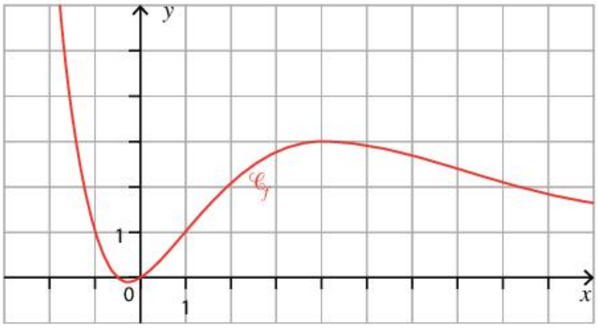
Situation 3 Caractériser la convexité

Objectif
Étudier la convexité des fonctions dérivables.

On souhaite étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-0,5x} + 1.$$

On admet que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Conjecturer la convexité de la fonction f et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. À la calculatrice, tracer la courbe representative de la fonction f'.
   c. Observer alors le lien entre les variations f' et la convexité de f.
3. **a.** Déterminer l'expression de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
   b. Établir le tableau de signe de f'' sur $\mathbb{R}$.
   c. Quel lien peut-on établir entre la convexité de f et le signe de sa dérivée seconde ?
   d. Quel lien peut-on établir entre les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ et le signe de la dérivée seconde de f ?

Situation 4 Étudier un coût de production

Objectif
Interpréter la convexité en contexte.

Une entreprise familiale souhaite étudier ses coûts de production en fonction de la quantité x de meubles qu'elle fabrique chaque année. Une étude a permis de modéliser ses coûts (en euro) par la fonction f définie sur $[0 ; 150]$ par l'expression :

$$f(x) = 0,1x^3 - 18x^2 + 1080x.$$

On rappelle que le coût marginal, coût de fabrication d'une unité supplémentaire, est approché par le nombre dérivé.

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée seconde f'' et en donner son signe sur $[0 ; 150]$.
   b. En déduire la convexité de la fonction f et l'abscisse des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.
2. **a.** Déterminer sur quel intervalle la croissance du coût de production est accélérée et sur quel intervalle elle est ralentie. Justifier la réponse.
   b. Justifier que l'abscisse du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ correspond à une production pour laquelle le coût marginal est minimal.