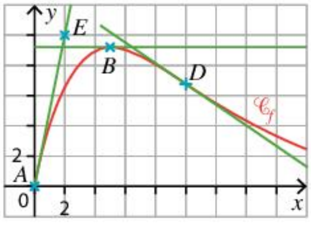
42 **Étude de marché**

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 18] ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées (2 ; 10) et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.

2. On admet que D est un point d'inflexion.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie B

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet.

Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ a été tracée ci-dessus. En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début d'une campagne publicitaire. En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour. Ainsi, par exemple, le 10e jour après le début d'une campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 18] par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (5-x)\mathrm{e}^{-0,2x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0 ; 18].

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 18] puis dresser le tableau de variation de f sur [0 ; 18].

3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

Calcul formel	
1	Dérivée((5-x)*exp(-0.2x)) → $-\frac{1}{5}(-x+5)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}$
2	Factoriser((-1) / 5 (-x + 5) e^((-1) / 5 x) - e^((-1) / 5 x), x) → $\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x-10}{5}$

a. Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

b. Interpréter cet intervalle dans le contexte de l'énoncé.

43 VRAI OU FAUX

Communiquer

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La somme de deux fonctions deux fois dérivables et convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I.

2. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1;3]$ ne peut pas être concave sur $[2;3]$.

3. Une fonction croissante et concave sur $]0;+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.

4. Si une fonction f dérivable change de convexité en a, alors sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.

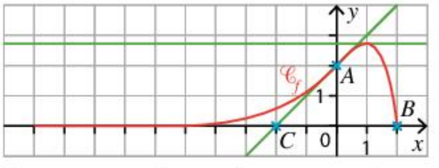
44 **Communiquer**

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [–10 ; 2].

On a placé les points $A(0;2)$, $B(2;0)$ et $C(-2;0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$;
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et préparer une argumentation orale.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.

2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.

3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle [–10 ; 2].

5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle [–10 ; 2].

6. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

7. On s'intéresse au nombre $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Indiquer le domaine du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, est égale à I.

b. Donner un encadrement du nombre I par deux entiers.

45 **Raisonner**

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

1. Donner, sans justifier, la convexité de la fonction f.

2. Montrer que l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 4 est $y = \frac{1}{4}x + 1$.

3. Déduire de la concavité de la fonction racine carrée que, pour tout réel positif x, on a $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{4}x + 1$.

46 Coût marginal
Modéliser, calculer, communiquer

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

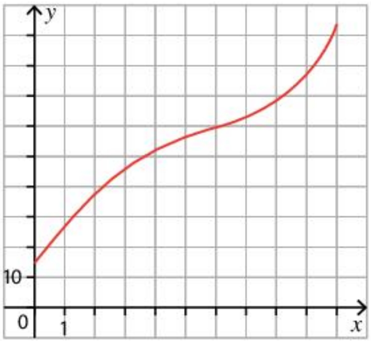
$$C(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 12x + 15.$$

Lorsque x est exprimé en centaine de paniers , $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10], le coût marginal, pour une centaine de paniers produite en plus, est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(3)$, le coût marginal pour trois cents paniers vendus. Interpréter cette valeur.

2. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction C.



Justifier graphiquement l'existence d'un point d'inflexion sur l'intervalle [0 ; 10]. Lire ses coordonnées.

3. On note C'' la fonction dérivée seconde de C.

a. Déterminer l'expression de $C''(x)$.

b. Déterminer le plus grand intervalle de la forme [a ; 10] inclus dans [0 ; 10] sur lequel la fonction C est convexe.

c. En déduire les coordonnées exactes du point d'inflexion sur $[0;10]$.

d. Interpréter le nombre a en termes de coût marginal.

47 Queue de lézard
Calculer, communiquer

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard, en fonction du nombre de jours, par la fonction f, définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = 10e^{u(x)},$$

où u est la fonction définie sur [0 ; +∞[par :

$$u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que, pour tout x positif, on a :

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2. a. Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon ce modèle, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ? Justifier.

c. Toujours selon ce modèle, justifier que c'est entre le 23^e^ et le 24^e^ jour que la queue du lézard aura atteint 5 cm.

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.

On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.

On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f'' sa fonction dérivée.

Enfin, on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1+u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur [0 ; +∞[.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale. Donner cette vitesse maximale.

4. a. Déduire du signe de la fonction f'' sur [0 ; +∞[la convexité de f.

b. Que peut-on en déduire sur la vitesse de croissance de la queue du lézard ?

NOTIONS REVUES :
LE COURS DE PREMIÈRE
EN VIDÉO

48 Mouvement rectiligne
Calculer, raisonner

Un point mobile P se déplace sur une droite d graduée en mètre et orientée de la gauche vers la droite. P est animé d'un mouvement rectiligne. On note x la fonction qui associe à tout instant t, en seconde, l'abscisse du point P sur la droite d. La fonction x est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$x(t)=\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{9}t^3-246t+500.$$

On note v la fonction qui à chaque instant t associe la vitesse instantanée $v(t)$ du mobile P et a la fonction qui à chaque instant t associe son accélération instantanée $a(t)$.
On rappelle que v est la dérivée de x et que a est la dérivée de v.

1. Calculer $v(t)$ et $a(t)$.

2. a. Déterminer le signe de $a(t)$ en fonction des valeurs de t.

b. En déduire le sens de variation de v.

c. Calculer $v(3)$. En déduire le signe de v.

3. Sur quel intervalle de temps le mobile se déplace-t-il vers la droite ? Et vers la gauche ? Justifier.

4. Déterminer la convexité de la fonction x puis, sans calcul, comparer la vitesse moyenne entre 4 et 5 secondes et la vitesse instantanée $v(4)$

Notions croisées

49 Taux de CO_2
Calculer, raisonner

Notions revues : Intégration (chap. 6), Théorème des valeurs intermédiaires (chap. 2), Algorithme : fonction (2de)

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. On réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t=0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux de CO_2 (en pourcentage) contenu dans le local, au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte, par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par :

$$f(t)=(0{,}8t+0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t}+0{,}03.$$

On donne le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
La valeur $f(0)=0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

x	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗	$f(1{,}75)$	↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.

a. Calculer $f(20)$.

b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

a. Justifier qu'il existe un unique instant T à partir duquel cette condition est satisfaite.

b. On considère la fonction ci-dessous, écrite en Python.

```python
from math import exp
def fonction(p):
    t=1.75
    V=0.7
    while V>0.035:
        t=t+p
        V=(0.8*t+0.2)*exp(-0.5*t)+0.03
    return t
```

Quelle est la valeur renvoyée par la commande `fonction(0.1)` ?
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

3. Au bout de 1,75 minute de fonctionnement de la hotte, le taux de CO_2 diminue. On souhaite alors déterminer sur quelle période cette baisse s'accélère puis sur quelle période elle ralentit.

a. Vérifier que $f''(t)=(0{,}2t-0{,}75)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

b. En utilisant le signe de f'', en déduire la convexité de f sur l'intervalle $[1{,}75\,;20]$.

c. Conclure.

4. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;11]$ par : $F(t)=(-1{,}6t-3{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}5t}+0{,}03t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$.

b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

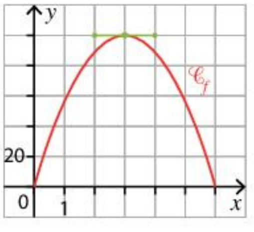
50 Satisfaction dans une entreprise
Modéliser, raisonner, communiquer

Notions revues : Exponentielle (1^{re}), Notion de limite (chap. 2), Théorème des valeurs intermédiaires (chap. 2)

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 100]. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ».
On dit qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « rejet » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A
Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous (x est exprimé en heure).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.
1. Quelle est la durée de travail quotidien menant à « saturation » ?
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « rejet ».

Partie B
Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle [0 ; 30] par :

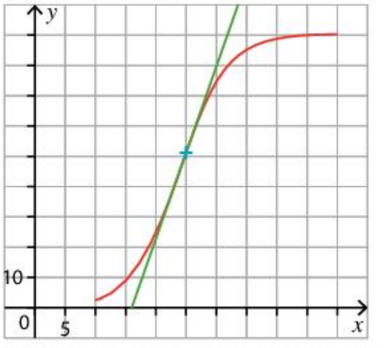
$$g(x) = 12{,}5xe^{-0{,}125x+1},$$

avec x exprimé en jour.
1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 30], on a :

$$g'(x) = (12{,}5 - 1{,}5625x)e^{-0{,}125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 30] puis dresser le tableau de variation de g sur cet intervalle.
3. Justifier qu'il existe deux durées de séjours dont le niveau de satisfaction est 80. En donner des valeurs approchées
4. Quelle durée conduit à l'effet « saturation » ?

Partie C
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit.
On admet que la fonction « *satisfaction* » h est définie sur l'intervalle [10 ; 50] par $h(x) = \dfrac{90}{1+e^{-0{,}25x+6}}$,
avec x exprimé en millier d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h.



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « *envie* ». En donner une interprétation concrète.
2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier à l'aide du graphique.
3. Vérifier que $h'(x) = \dfrac{-22{,}5e^{-0{,}25x+6}}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^2}$

On admet que $h''(x) = \dfrac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^3}$.

4. En déduire la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.

51 Croissance d'un garçon
Modéliser, raisonner, communiquer

Notions revues : Méthode des trapèzes (chap. 6)

On considère le tableau ci-contre donnant la vitesse de croissance instantanée d'un garçon, en mm par mois, en fonction de son âge, entre le jour de sa naissance et le jour de ses 20 ans.
On modélise cette vitesse de croissance par une fonction f qui, à chaque valeur x de l'âge du garçon en mois, associe cette vitesse de croissance instantanée en mm par mois.
La courbe de la fonction f est donnée ci-après.

Âge en mois	Croissance instantanée en mm par mois
0	40,0
12	14,0
24	8,0
36	6,0
48	5,5
60	5,5
72	5,5
84	5,5
96	4,8
108	4,1
120	3,6
132	1,0
144	5,0
156	6,5
168	6,3
180	4,0
192	2,0
204	1,0
216	0,5
228	0,1
240	0,0