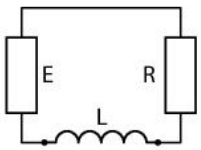
54 Intensité du courant électrique
Calculer, communiquer

Un circuit électrique en série comprend un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampère, est une fonction du temps t, exprimé en seconde, et est solution de l'équation différentielle (1) :

$$Li'(t) + Ri(t) = E.$$

On donne $L = 0{,}2$ H, $R = 100\ \Omega$ et $E = 10$ V.

1. Écrire l'équation différentielle (1) en remplaçant L, R et E par leurs valeurs.
2. Résoudre l'équation différentielle (2) :

$$\frac{1}{5}y' + 100y = 0.$$

3. Vérifier que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(t) = -\frac{1}{10}\,e^{-500t} + \frac{1}{10}$ est solution de l'équation différentielle (1).

4. a. Étudier les variations de la fonction i sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b. Dresser le tableau de variation de i sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
c. Préciser la limite de i en $+\infty$.
5. Déterminer l'instant t_1 à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à 0,095 A.
Donner la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-3}.

55 Taux d'alcoolémie
Chercher, calculer, communiquer

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang, mesurée en gramme par litre (g/L), varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption.
Ce taux est appelé « taux d'alcoolémie ».
Après l'absorption de 30 grammes d'alcool pur (soit 3 verres standard de boisson alcoolisée), le taux d'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heure), est modélisé par une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 1{,}5e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction f définie pour tout réel t positif par $f(t) = 1{,}5te^{-t}$ est une solution de (E).
2. On considère une personne dont le taux d'alcoolémie est modélisé par la fonction f.
Donner la valeur du taux d'alcoolémie de la personne considérée au bout de deux heures.
3. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a $f(t) = \frac{1{,}5t}{e^t}$, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
4. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
5. Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il le plus élevé pour la personne considérée ? Donner une valeur approchée de ce taux à 10^{-2} près.
6. En France, la législation autorise, pour un conducteur, un taux d'alcoolémie maximal de 0,5 g/L.
Sachant que la personne a absorbé l'équivalent de 30 g d'alcool pur à 12 h, à partir de quelle heure pourra-t-elle prendre le volant de son véhicule sans être en infraction ?

56 Consommation d'eau potable
Modéliser, communiquer

Une catastrophe a rendu impropre à la consommation l'eau potable d'une commune. L'eau du réseau contient une substance chimique dont la concentration en fonction du temps t écoulé depuis le début de la pollution est modélisée par la fonction f telle que :

$$f(t) = 30e^{-0{,}06t}.$$

La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$.
$f(t)$ est en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et t en h.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}06y = 0.$$

2. Justifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).
3. Calculer $f(0)$. Interpréter ce résultat.
4. Quelle est la concentration arrondie à 10^{-2}, de la substance chimique dans l'eau au bout d'une journée ?
5. L'eau sera à nouveau consommable si la concentration de la substance chimique dans l'eau est inférieure à $0{,}05\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
Au bout de combien de temps pourra-t-on de nouveau consommer cette eau ? Arrondir à 1 h.

57 Crème solaire

Raisonner, calculer

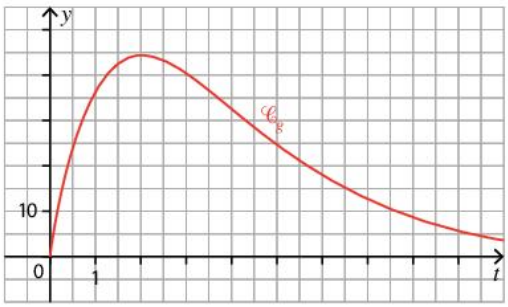
1. Un laboratoire teste l'efficacité d'une nouvelle crème solaire. Pour cela, il mesure le taux d'hydratation, en pourcentage, de la peau d'une personne, qui est exposée au soleil pendant 10 heures. On admet que pour tout réel t de $[0 ; 10]$, $60te^{-0,5t}$ est le taux d'hydratation de la peau au bout de t heures après l'application de la crème. On note g la fonction qui, à tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$, associe $60te^{-0,5t}$.

a. Calculer le taux d'hydratation, en pourcentage, de la peau une demi-heure après l'application de la crème. Arrondir au dixième.

b. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ ci dessous, déterminer à quel moment le taux d'hydratation, en pourcentage, est maximal.

c. On peut commercialiser cette crème si le taux d'hydratation dépasse 30 % pendant une durée d'au moins 3 heures.

À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ci-dessous, expliquer si le laboratoire peut ou non commercialiser cette crème.



2. Un chercheur du laboratoire étudie l'élimination au contact de la lumière d'un composant de la crème solaire. La concentration de ce composant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps d'exposition à la lumière, en heure, $f(t)$ représente la concentration en $g \cdot L^{-1}$ de ce composant restant dans la crème.

On admet que la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ est solution de l'équation différentielle suivante (E) :

$$y' + 0,4y = 0.$$

a. On sait qu'à l'instant $t = 0$, la concentration du composant est égale à $1,3\ g \cdot L^{-1}$.

Montrer alors que, pour tout réel t de $[0 ; +\infty[$, $f(t) = 1,3e^{-0,4t}$.

b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Ce résultat est-il cohérent avec la situation étudiée ? Pourquoi ?

c. Déterminer au bout de combien de temps, la concentration du composant est inférieure à $0,3\ g \cdot L^{-1}$. Donner la valeur, en heure et minute, arrondie à la minute.

Notions croisées

58 Puissance du son

ALGO PYTHON

Modéliser, calculer, communiquer

Notions revues : boucle while (1re), Exponentielle (1re), Logarithme (chap. 4)

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées séparément.

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique. La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en seconde. On modélise par une fonction f la puissance du son émis, exprimée en watt, t secondes après le pincement de la corde.

On admet que f est solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$25y' + 3y = 0,$$

où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle $25y' + 3y = 0$.

2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.

3. Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? Arrondir au watt près.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 100\ e^{-0,12t}.$$

Partie B

On s'intéresse à l'instant à partir duquel la puissance du son émis après le pincement de la corde sera inférieure à 80 watts.

On considère la fonction python suivante.

```
1 from math import exp
2 def ProblemeSon(pas):
3     a=0
4     while 100*exp(-0.12*a) > 80 :
5         a = a + pas
6     return (a - pas, a )
```

1. Quelles sont les valeurs renvoyées par cette fonction lorsque l'on prend un pas de 0,5 ?

2. Dans le contexte de cet exercice, que représentent ces valeurs ?

Partie C

1. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 80$. Donner la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-3}.

Interpréter ce résultat.

2. Calculer et interpréter la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

Notions croisées

59 Pression atmosphérique ALGO PYTHON
Calculer, communiquer

Notions revues : Suites, Algorithmique : boucle while (1re), Logarithme (chap. 4)

L'expérience de Pascal au Puy-de-Dôme (1648)

En 1648, Blaise Pascal, domicilié à Paris, a demandé à son beau-frère Florin Périer de comparer la hauteur de mercure dans un baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme à celle d'un baromètre situé à Clermont-Ferrand.
Florin Périer constata que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand. Blaise Pascal, par cette expérience, a montré que la pression atmosphérique diminuait lorsque l'altitude augmentait.
Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).
On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 hPa au niveau de la mer.

Partie A Règle simplifiée

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « La pression atmosphérique diminue de 0,11 hPa quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant cette règle.

Altitude (en m)	0	800	1 500	2 000
Pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25	...	...	...

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée.
On a donc $u_0 = 1\,013{,}25$.
a. Calculer u_1 et u_2.
b. Justifier que la suite (u_n) est arithmétique et exprimer u_n en fonction de n.
c. En déduire l'altitude, exprimée en mètre, à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 900 hPa d'après cette méthode.

Partie B Formule barométrique

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ \ y' + 0{,}12y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' est la fonction dérivée de y.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x en kilomètre, associe la pression atmosphérique en hectopascal, est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1013{,}25$.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale.
2. En utilisant la fonction f, déterminer :
a. une valeur approchée à 0,01 de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude ;
b. l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.
3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n.
Justifier qu'avec ce modèle, la suite (v_n) est géométrique.

Partie C Formule du nivellement barométrique

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes. Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui, à l'altitude x en kilomètre, associe la pression atmosphérique en hPa :

$$p(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{5{,}255\ln\left(1-\frac{6{,}5x}{288{,}15}\right)}.$$

1. Calculer la pression atmosphérique (en hPa, arrondie à l'unité) au sommet de l'Everest dont l'altitude est 8 848 mètres.
2. a. Recopier et compléter la fonction Python suivante en utilisant la fonction p, de façon qu'elle renvoie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa.

```
1  from math import exp
2  def pression():
3      A=0
4      P=1013.25
5      while ... :
6          A=A+0.1
7          P=...
8      return ...
```

b. Déterminer cette altitude.
Donner sa valeur exacte puis une valeur approchée à 100 mètres.

60 Modèle proie prédateur TABLEUR

Représenter

Notions revues : Suites (1re)

Lorsque, dans un milieu naturel, deux populations animales, des prédateurs et des proies, interagissent, leurs taux d'accroissement sont liés.
Afin d'étudier ce phénomène, on décide d'introduire dans un immense bassin, deux espèces de poissons, 1 500 poissons d'une espèce herbivore A et 70 d'une espèce B, prédatrice de l'espèce A.

Partie 1 Modèle continu

Ce modèle a été proposé simultanément et indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926.
Si l'on note $a(t)$ l'effectif des proies et $b(t)$ l'effectif des prédateurs au temps t en jour, les fonctions vérifient alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} a' = a(0{,}06 - 0{,}002b) \\ b' = b(-0{,}03 + 0{,}000\ 03a) \end{cases}.$$

1. En l'absence de prédateurs, exprimer $a(t)$ en fonction de t avec la condition initiale $a(0) = 1\ 500$.
2. En l'absence de proies, exprimer $b(t)$ en fonction de t avec la condition initiale $b(0) = 70$.
3. Montrer qu'il existe deux fonctions constantes non nulles solutions de ce système.
Interpréter ce résultat.
Mathématiquement, résoudre ce système différentiel est difficile. Afin d'observer l'évolution de ces deux populations, on utilise un modèle discret et des suites numériques.

Partie 2 Modèle discret

On note a_n l'effectif des proies et b_n l'effectif des prédateurs après n jours. On suppose alors que :

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = a_n(0{,}06 - 0{,}002b_n) \\ b_{n+1} - b_n = b_n(-0{,}03 + 0{,}000\ 03a_n) \end{cases}.$$

1. a. En l'absence de prédateurs, exprimer a_n en fonction de n en prenant $a_0 = 1\ 500$.
b. En l'absence de proies, exprimer b_n en fonction de n en prenant $b_0 = 70$.
c. Comparer ces résultats à ceux de la première partie pour n et t prenant comme valeurs 1, 2, 3, 10 et 100.
2. On utilise une feuille de tableur afin de calculer les nombres de poissons des deux types au cours du temps.

	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	1500	70
3	1	1380	71,05
4	2	1266,702	71,85997

a. Quelle formule saisir en B3 et C3 afin d'obtenir par recopie vers le bas les termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à $n = 500$?
b. Représenter graphiquement les points de coordonnées $(a_n\ ;\ b_n)$. Commenter l'évolution liée de ces deux populations.

61 Un modèle simple TABLEUR

Modéliser, communiquer

Notions revues : Limites (chap. 2), Logarithme (chap. 4)

Le prix de vente d'un minerai dépend de l'offre et de la demande.
On suppose qu'un certain minerai très rare fait l'objet d'une demande constante pour les besoins d'une production donnée. Plus la production de minerai est importante, plus le prix du minerai sur le marché baisse. Les cours de ce marché sont évalués en temps réel par des analystes financiers.
On note x la quantité de ce minerai, en tonne, disponible à un instant donné et p la fonction qui, à tout réel x positif, associe le prix correspondant, en millier de dollars, d'une tonne de ce minerai sur le marché.
On admet que cette fonction p est définie pour tout réel $x \geqslant 0$, en posant $p(0) = 400$ et qu'elle est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.
En cas d'augmentation de l'offre, on constate que la variation du prix est proportionnelle au prix, c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle que :

$$p'(x) = kp(x).$$

1. On donne $p(1) \approx 296{,}327$ et $p(1{,}1) \approx 287{,}569\ 5$.
En déduire une approximation du taux d'accroissement de p entre 1 et 1,1, que l'on prendra comme approximation du nombre dérivé de p en 1 puis une approximation de k.
2. Dans la suite, on prendra $k = -0{,}3$.
a. Déterminer la fonction p.
b. Étudier le sens de variation de la fonction p.
c. Étudier la limite de p en $+\infty$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
d. Construire le tableau de variation de p.
3. Résoudre l'équation $p(x) = 250$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Vérifier la déclaration suivante : « Quand l'offre augmente d'une tonne, le prix baisse d'environ 26 %. »
5. L'exploitation de ce minerai n'est rentable qu'à la condition de le vendre au moins 50 000 $ la tonne. Déterminer le seuil de mise à disposition, en tonne de minerai, que les producteurs ne doivent pas dépasser à un instant donné. On donnera le résultat exact puis une valeur approchée à 10^{-3}.