Méthode 1 Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle

Énoncé

Dans chacun des cas, montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I.

a) $y(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$; $f(x) = 15x^4 - 2x + 5$, avec $I = \mathbb{R}$

b) $y(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, avec $I =]0\,;+\infty[$

Conseils & Méthodes

1. Ne pas oublier de justifier la dérivabilité. Pour justifier de la dérivabilité, penser à utiliser les opérations sur les fonctions dérivables. Ici la fonction y est la somme de fonctions dérivables sur I, donc elle est dérivable sur I.
2. Calculer la dérivée et retrouver f.

Méthode 2 Déterminer la primitive d'une fonction usuelle

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive F sur $I =]0\,;+\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$.

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^3$ **c)** $x \mapsto \frac{1}{x^4}$

Conseils & Méthodes

1. D'après le tableau du cours une primitive de $\frac{1}{x}$ est la fonction $\ln(x)$.
2. Appliquer la formule du tableau des primitives des fonctions usuelles.
3. Attention dans le tableau du cours, lorsque l'entier n est négatif avec $n \neq -1$, dans la formule $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ le nombre $n + 1$ est aussi négatif.

Méthode 3 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction, ou une primitive avec conditions initiales

Énoncé

1. Soit $f : x \mapsto 3x^2 + \dfrac{1}{x}$. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x^3 + \ln(x)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer l'unique primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui prend en e la valeur 0.

Solution

Conseils & Méthodes

1. Se rappeler que deux primitives diffèrent d'une constante.
2. Pour trouver la constante qui convient lorsque des conditions initiales sont imposées, on résout une équation.

Méthode 4 Déterminer une primitive

Énoncé

Pour chacune des fonctions f proposées, déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ ou $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x)$ **b)** $f(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{x^2+x+2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solution

Conseils & Méthodes

1. On reconnaît la forme $2uu'$ du cours. Penser à bien vérifier les trois facteurs : 2 ; u et u'.
2. Bien vérifier la dérivée de u.
3. Penser à vérifier le signe de u.

Méthode

5 Résoudre l'équation $y' = ay$

Énoncé

1. Résoudre l'équation $3y' = 2y$.
2. Donner l'allure des courbes solutions.
3. Déterminer ensuite l'unique solution f telle que $f(1) = \mathrm{e}$.

Solution

Conseils & Méthodes

1 Retrouver la forme d'équation $y' = ay$.

2 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, résoudre l'équation $Ke^{ax_0} = y_0$ d'inconnue K.

Méthode

6 Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1.

Solution

Conseils & Méthodes

1 Retrouver la forme $y' = ay + b$.

2 Déterminer la fonction constante solution. En déduire alors la forme de toutes les solutions.

3 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, ici $f(1) = 0$, il faut résoudre l'équation d'inconnue K.

Méthode 7 Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$ Algo

↪ Cours 3 p. 120

Énoncé

On considère l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. **Résoudre cette équation différentielle.**
2. **Déterminer la solution f telle que $f(1) = \mathrm{e}$.**
3. **Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.**
4. **Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.**
5. **Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 20$.**
6. **Résoudre l'inéquation $f(x) > 40$.**
7. **Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) > 10\,000$.**

Solution

Conseils & Méthodes

1 Voir la méthode 5 pour la résolution de l'équation $y' = ay$.

2 Connaissant $f(x)$, calculer $f(1)$ puis résoudre l'équation pour trouver C.

3 C'est le signe de la dérivée qui donnera les variations.

4 Il faut étudier la limite d'une fonction composée.

5 Penser à l'équivalence $\mathrm{e}^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.

6 C'est une boucle non bornée qu'il faut dans l'algorithme.

Méthode **8**

Modéliser des phénomènes

↪ Cours 3 p. 120

Énoncé

**Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps *t*, mesuré en secondes.
On modélise par *f*(*t*) la puissance du son émis, exprimée en watt, *t* secondes après le pincement de la corde. Le son s'affaiblit à une vitesse proportionnelle à sa puissance, il a été établi que le coefficient de proportionnalité est de – 0,12.**

1. **Écrire l'équation différentielle traduisant la diminution de son.**

2. **Déterminer la fonction *f* solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.**

3. **Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? Arrondir au watt près.**

4. **Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 80$, on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-3}. Interpréter ce résultat.**

Solution

Conseils & Méthodes

1 Si *f* est la fonction puissance, alors la vitesse d'évolution de cette puissance est f'. On traduit ensuite l'enoncé.

2 On retrouve le modèle $y' = ay$ avec une condition initiale qui assure l'unicité de la solution.

3 Interpréter la fonction *f* dans le contexte de l'exercice.