SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Trouver une fonction dont la dérivée est connue

Objectif
Introduire la notion de primitive.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera le tableau des dérivées des fonctions usuelles ci-dessous.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$

1 **a.** Déterminer une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

b. Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

c. Déterminer une fonction H dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.

d. Déterminer une fonction U dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$.

e. Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer une fonction V dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^n$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1$.

a. Montrer que la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_1(x) = e^x - x + 3$ a pour dérivée f.

b. Déterminer une autre fonction F_2 définie sur $\mathbb{R}$ ayant f pour dérivée.

3 Déterminer deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ dont la dérivée est la fonction v définie sur $]0 ; +\infty[$ par $v(x) = \frac{1}{x}$.

Situation 2 Étudier le déplacement d'un mobile

Objectif
Introduire la recherche d'une primitive particulière.

Un mobile se déplace sur une droite graduée. L'unité est le mètre.
La position du mobile est donnée à chaque instant t, en seconde, par une fonction x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $x(0) = 5$.
La vitesse instantanée du mobile, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, à l'instant t, est donc donnée par $x'(t)$, où x' est la fonction dérivée de la fonction x.
On donne l'expression algébrique de cette fonction x' :

$$x'(t) = 2t - 6 \text{ pour tout réel positif } t.$$

1 Déterminer deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(t) = g'(t) = 2t - 6$.

2 **a.** Les fonctions f et g ainsi déterminées vérifient-elles la condition initiale $f(0) = 5$ ou $g(0) = 5$?

b. Déterminer une fonction h telle que $h'(t) = 2t - 6$ et $h(0) = 5$.

3 En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ admettant x' comme fonction dérivée.

Situation 3 Utiliser des bactéries pour dépolluer LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Introduire une équation différentielle.

Découverte au Japon, la bactérie *Ideonella sakaiensis* est capable, sous certaines conditions, de dégrader le plastique de type polytéréphtalate d'éthylène (que l'on utilise souvent pour la fabrication des bouteilles d'eau).
Pour étudier l'évolution de la population de ces bactéries, les chercheurs ont procédé à une mise en culture.
On modélise l'évolution du nombre de bactéries par une fonction f, dérivable sur $[0\ ;+\infty[$, où $f(t)$ est le nombre de bactéries (exprimé en millier) présentes dans la culture à l'instant t (exprimé en heure).
Pendant les 48 premières heures, la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre de bactéries. On admet que la vitesse d'accroissement de la population est donnée par la fonction dérivée f' de f.

1. Montrer que la fonction f vérifie $f'(t) = kf(t)$ où k est une constante réelle.
2. On suppose que $k = 0{,}02$. On dit que f est solution, sur $[0\ ;48]$, de l'équation différentielle (E) :
$$y' = 0{,}02y,$$
où y désigne une fonction de la variable t.
   a. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{0{,}02t}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer une autre fonction h solution de l'équation différentielle (E).
3. À l'aide d'un logiciel de géométrie, on souhaite représenter plusieurs fonctions solutions de cette équation.
   a. Créer un curseur a compris en -5 et 5. Représenter la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = a\mathrm{e}^{0{,}02t}$ dans une fenêtre d'affichage judicieusement choisie.
   b. Les biologistes ont introduit dans une cuve 3 milliers de bactéries à l'instant $t = 0$.
   Conjecturer la valeur de la constante a de la fonction solution.
   c. Vérifier cette valeur par le calcul.
4. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il doublé ? Arrondir le résultat au millième puis donner la réponse en heure et minute.

Situation 4 Étudier la loi de refroidissement de Newton

Objectif
Résoudre une équation différentielle.

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps inerte est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant.
Un verre d'eau à la température initiale de 20°C est placé dans un réfrigérateur où la température est maintenue constante à 5°C.
On note $f(t)$ la température de l'eau en °C à l'instant t, où t représente le temps exprimé en heure. L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le verre est placé dans le réfrigérateur.
On définit ainsi une fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. On suppose de plus que f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On considère que, d'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}75(y-5)$.

1. **a.** Déterminer l'ensemble E des solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}75\,y$.
   b. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle $y' = -0{,}75y - 3{,}75$.
2. On admet que les solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}75y - 3{,}75$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}75t} + 5$.
   a. D'après les conditions initiales de l'expérience, déterminer $f(0)$.
   b. En déduire que $f(t) = 15\mathrm{e}^{-0{,}75t} + 5$.
3. Selon ce modèle, combien de temps faut-il pour que la température de l'eau atteigne 6°C ?