Méthode 1 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = a$ ou $\ln(u(x)) < a$

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\ln(x) = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1 - x) \leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$

Conseils & Méthodes

1. Commencer par déterminer les conditions d'existence, à savoir l'ensemble (E) des réels x tels que $u(x) > 0$ dans l'expression $\ln(u(x))$.
2. Simplifier un logarithme en appliquant la fonction exponentielle.
3. Simplifier en appliquant la fonction logarithme.

Méthode 2 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Énoncé

1. **Résoudre l'équation $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x)$.**
2. **Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2)$.**

Conseils & Méthodes

1. Déterminer les conditions d'existence, soit l'ensemble (E) des réels x : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
2. Puis résoudre dans I $u(x) = v(x)$.
3. Puis résoudre $u(x) < v(x)$.
4. S'assurer que les solutions trouvées appartiennent bien à l'ensemble correspondant aux conditions d'existence.

Méthode 3 Utiliser les propriétés algébriques de ln

Énoncé

Exprimer en fonction de ln 2 chacun des nombres suivants.

a) $\ln\frac{1}{4}$ **b)** $\ln 8 + 5\ln 2$ **c)** $\ln\sqrt{32}$ **d)** $\ln 10 - \ln 20$

Conseils & Méthodes

1. Utiliser les propriétés $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$ ainsi que $\ln a^n = n\ln a$.
2. Avec une somme/différence $\ln a + \ln b$ on peut penser à utiliser $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$; $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
3. Chercher à écrire $\ln a$ sous la forme $\ln\left(c^n\right)$, soit $n\ln c$.

Méthode 4 Résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Conseils & Méthodes

1. Pour se « débarrasser » de l'inconnue en exposant, il faut penser à appliquer la fonction ln dans chaque membre de l'inéquation.
2. Lorsqu'il s'agit de diviser les membres d'une inéquation par $\ln a$, il faut être vigilant quant au signe de $\ln a$.

   Pour $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: le sens de l'inégalité change. En revanche, si $a > 1$, $\ln a > 0$ et le sens de l'inégalité reste alors le même.
3. Ne pas oublier de conclure en tenant compte du fait que n est un entier naturel.

Méthode 5 Étudier une fonction avec ln

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Conseils & Méthodes

1. Penser à utiliser les opérations sur les limites.
2. Pour dresser le tableau de variations d'une fonction, déterminer au préalable le signe de la dérivée.

Méthode 6 Calculer la dérivée d'une fonction du type ln *u*

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$. Calculer $f'(x)$.

Conseils & Méthodes

1. Vérifier que u est dérivable et strictement positive sur I.
2. Puis utiliser $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Méthode 7 Étudier une fonction contenant ln x à l'aide d'une fonction auxiliaire

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$.

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\phi(x)=x^2-1+3\ln x$.

a) Calculer $\phi(1)$ et la limite de ϕ en 0.

b) Étudier les variations de ϕ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire le signe de $\phi(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\phi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.

Déterminer avec la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

D'après Bac S, Amérique du Sud, 2017.

Conseils & Méthodes

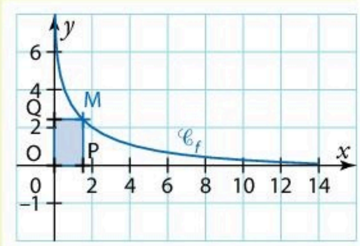
1. Pour étudier le signe d'une fonction à partir des variations de celle-ci, il faut utiliser des images en particulier.
2. Afin de mieux visualiser le signe de ϕ, dresser le tableau de variations de ϕ en y incluant la valeur de $\phi(1)$.
3. Il est usuel d'utiliser une fonction auxiliaire pour étudier le signe d'une dérivée.
4. Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une équation admet une unique solution sur I, il faut penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

8 Étudier une fonction avec ln *u*

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14[$ par $f(x)=2-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. **Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle OPMQ.**

2. **Dresser le tableau de variations de g sur $]0\ ;\ 14[$.**

En déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

D'après Bac S, Pondichéry, 2016.

Conseils & Méthodes

1 Un point $M \in \mathscr{C}_f$ équivaut à dire que ses coordonnées sont du type $(x\ ;\ f(x))$.

2 Pour résoudre une inéquation avec ln, on peut notamment chercher à transformer l'inéquation sous la forme $\ln a \geqslant \ln b$.

3 Pour résoudre un problème d'optimisation, penser à étudier les variations de la fonction qui modélise le problème.