



## Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+2)e^{-x} + 1$  et la droite  $d$  d'équation  $y = 1$ .

1. Tracer sur la calculatrice la fonction  $f$  et la droite  $d$  pour  $x \in [-3; 3]$  et  $y \in [-3; 4]$ .

Que peut-on conjecturer pour les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  ?

2. Que représente la droite  $d$  pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  ? Pourquoi ?

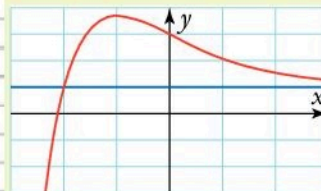
3. On donne l'algorithme en Python  suivant.

a) Que représente `abs(1-f(x))` ?

b) Que renvoie la fonction `dist(a)` ?

c) À l'exécution, on voit que `dist(10**(-3))` renvoie 10 et `dist(10**(-6))` renvoie 17. En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de  $f(x)$  en  $+\infty$  ?

```
from math import *
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)+1
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-1)>=a:
        x+=1
    return x
```



## Conseils &amp; Méthodes

- 1 Bien respecter les indications pour la fenêtre pour obtenir un visuel exploitable.
- 2 On suppose que la tendance de la courbe ne varie pas en dehors de la fenêtre.
- 3 C'est la définition d'une asymptote à une courbe.
- 4 Attention la condition sur une boucle conditionnelle est l'opposé de ce que l'on veut obtenir  $|f(x) - 1| < a$ .
- 5 C'est la définition d'une limite finie en  $+\infty$ .

Méthode

2

## Conjecturer la limite infinie d'une fonction en un point



### Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par :  $f(x) = \frac{0,5x^2 - 1,5x + 2}{x - 2}$ .

1. a) Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre  $x \in [-1 ; 5]$  et  $y \in [-5 ; 5]$ .

b) Que peut-on conjecturer pour les limites de la fonction  $f$  lorsque  $x$  tend vers 2, en valeurs supérieures et en valeurs inférieures ?

Peut-on conjecturer qu'il existe une limite de la fonction  $f$  en 2 ?

2. Tracer sur le même graphique la droite  $d$  d'équation  $x = 2$ .

Que représente la droite  $d$  pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  en 2 ?

### Conseils & Méthodes

1 Lorsque  $x$  se rapproche de 2

- en valeurs supérieures, limite à droite, les valeurs de  $f(x)$  sont de plus en plus grandes.
- en valeurs inférieures, limite à gauche, les valeurs de  $f(x)$  sont de plus en plus grandes en négatif.

Méthode

3

## Conjecturer la limite finie d'une fonction en un point



### Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

1. Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre  $x \in [-4 ; 4]$  et  $y \in [-1 ; 5]$ .

2. La fonction  $f$  est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

### Conseils & Méthodes

- 1 Pour tracer une fonction, la calculatrice utilise des points qu'elle relie ensuite. Le point en  $x = 0$  étant singulier, la calculatrice n'en tient pas compte.

## Déterminer une limite en l'infini

## Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = 4x - 3 + \frac{3}{x-1}$  et la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 - x + 3$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. a) Déterminer le signe de  $(x-1)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b) En déduire les limites de  $f$  en 1 en valeur supérieures et inférieures.
3. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .

## Conseils &amp; Méthodes

- 1 Avant de déterminer une limite par somme, il faut vérifier rapidement que l'on n'obtient pas une forme indéterminée.
- 2 Suivant que  $x$  se rapproche de 1 en valeurs supérieures ou inférieures,  $(x-1)$  change de signe.
- 3 En effet en  $+\infty$ , la fonction  $x \mapsto x^2$  tend vers  $+\infty$  et la fonction  $x \mapsto -x + 3$  vers  $-\infty$ .

## Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison

## Énoncé

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $I = [1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } g(x) = x + \cos(x).$$

1. Pourquoi ne peut-on pas déterminer directement les limites des fonction  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  ?
2. À l'aide d'un encadrement sur  $I$  déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. À l'aide d'une inégalité sur  $I$ , déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .

## Conseils &amp; Méthodes

- 1 On ne change pas une inégalité si l'on multiplie ou divise par un nombre strictement positif.
- 2 Un rapide aperçu de la fonction  $g$  montre qu'elle tend vers  $+\infty$  le terme prépondérant étant  $x$ .
- 3 On ne change pas une inégalité lorsqu'on ajoute ou retranche un même terme de chaque côté de l'inégalité.





## Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = [-2 ; +\infty[$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ , on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0 ; 2]$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[-2 ; +\infty[$ .

Donner un encadrement au dixième près de  $\alpha$ .

## Conseils &amp; Méthodes

- 1 Il est important de rappeler les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires pour la rigueur du raisonnement.
- 2 Lorsqu'une équation n'a pas de solution, une simple majoration est suffisante pour conclure.
- 3 Pour déterminer un encadrement d'une solution, la méthode la plus simple consiste en un balayage d'un tableau de valeurs avec un pas adapté.

## Déterminer les limites d'une fonction rationnelle

## Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ .

1. Tracer la fonction  $f$  sur une calculatrice pour  $x \in [-4; 4]$  et  $y \in [-10; 10]$  puis conjecturer les limites en  $\pm\infty$  et  $\pm 1$ .
2. a) Pour  $x \neq 0$ , factoriser par  $x^2$  le dénominateur  $(1 - x^2)$  puis confirmer les limites de la fonction  $f$  en  $\pm\infty$  trouvées à la question 1.
- b) Déterminer le signe de  $(1 - x^2)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- c) Confirmer alors les limites de la fonction  $f$  en  $\pm 1$  trouvées à la question 1.

## Conseils &amp; Méthodes

- 1 Pour ne pas trouver une forme indéterminée en l'infini, on change la forme de  $f(x)$ .
- 2 Comme le dénominateur de  $f(x)$  s'annule en  $\pm 1$ , il faut donc déterminer le signe autour de ces valeurs.
- 3 Attention, les limites en  $\pm 1$  ne sont pas des formes indéterminées. Ne pas changer la forme de  $f(x)$  comme en  $\pm\infty$ .



## Énoncé

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $I = [0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{10x}{e^x + 1}$ .

1. Démontrer que pour tout réel de  $I$  que :  $f'(x) = \frac{10}{(e^x + 1)^2} \times g(x)$  où  $g$  est une fonction définie sur  $I$  par  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .
2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  de  $I$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .  
b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$ .  
c) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
3. En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $I$ . On admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## Conseils &amp; Méthodes

- 1 L'unicité de la solution est obtenue par le théorème des valeurs intermédiaires. Il est nécessaire de connaître les variations de la fonction  $f$ .
- 2 Le changement de signe de la fonction  $g$  sur  $I$  est alors établi.
- 3 On programme le tableau de valeurs avec comme valeur initiale 0 et un pas de 0,01.